**ЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**В.М. Дякон**

**Л.Є. Ковальов**

# МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Навчальний посібник

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*

*як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів*

*За загальною редакцією*

*професора В.М. Міхайленка*

*Київ*

*Видавництво Європейського університету*

*2007*

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист за № 14/18.2-2661 від 16.12.04)

**Дякон В.М., Ковальов Л.Є.**
**Математичне програмування**: Навчальний посібник / За загальною редакцією В.М. Міхайленка. – 3-е видання, виправлене і доповнене. – К.: Вид-во Европ. ун-ту, 2007. – 497 с.

Посібник містить систематичне викладення основних питань математичного програмування. Представлені моделі лінійного та нелінійного програмування, класичні методи оптимізації, задачі опуклого та динамічного програмування, моделі стохастичного програмування, елементи теорії ігор. Розглянуті деякі питання застосування інтегрованого середовища MathCad для розв'язання задач математичного програмування.

Теоретичний матеріал супроводжується значною кількістю прикладів, після кожного розділу подані питання для самоконтролю та вправи для самостійного розв'язування.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за економічними та інженерними спеціальностями.

# ЗМІСТ

# ПЕРЕДМОВА

Зміст освіти і процес навчання тісно взаємопов’язані. Навчальний посібник є своєрідним показником, дидактичним об’єктом, який одночасно виступає і як носій змісту, і як проект навчального процесу.

Вища освіта досягає розквіту, коли її діяльність відповідає потребам практики, орієнтується на індивідуальний підхід, розвиток творчих здібностей майбутніх фахівців на основі всемірної активізації самостійної роботи студентів, широкому застосуванню комп’ютерних технологій.

Пропонований навчальний посібник зорієнтований на навчальну програму курсу „Математичне програмування” для студентів і аспірантів економічних спеціальностей, а також може бути використаний при викладанні курсу „Дослідження операцій” при підготовці фахівців напряму „Комп’ютерні науки”.

У посібнику викладені необхідні основи математичного апарату і приклади його використання у сучасних економічних застосуваннях. Викладання матеріалу проведене майже без доведення – основний наголос зроблений на оволодіння навиків використання математичного апарату. Кожен розділ супроводжується розв’язанням характерних задач і відповідних економічних застосувань. Посібник містить питання для самоконтролю і значну кількість вправ до кожного розділу.

У посібнику введений розділ 2, який містить основні відомості з лінійної алгебри і теорії ймовірностей, необхідні для засвоєння матеріалу підручника.

У розділі 12 розглянуті основи роботи в інтегрованому середовищі MathCad та приклади розв’язування задач оптимізації за його допомогою.

Завдяки різноманітному матеріалу і значної кількості прикладів і економічних застосувань, пропонована книга може служити довідниковим посібником для фахівців, які працюють у різних галузях економіки.

Автори посібника – кандидати фізико-математичних наук, доценти О.М. Дякон і Л.Є. Ковальов. Загальна редакція здійснена доктором технічних наук, професором, завідувачем кафедри математики Європейського університету В.М. Міхайленко.

# РОЗДІЛ 1
# ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

## 1.1. Предмет математичного програмування

Сучасна економічна теорія, як на мікро-, так і на макрорівні, містить як природний, необхідний елемент математичні моделі і методи. Використання математики в економіці дозволяє, по-перше, виділяти і формально описувати найбільш важливі, суттєві зв'язки економічних змінних й об'єктів: вивчення такого складного об'єкту передбачає високу ступінь абстракції. По-друге, з чітко сформульованих вихідних даних і співвідношень методами дедукції можна отримати висновки, адекватні об'єкту, який вивчається, у тій же мірі, що й зроблені передумови. По-третє, методи математики і статистики дозволяють індуктивним шляхом отримати нові знання про об'єкт: оцінювати форму і параметри залежностей його змінних, які у найбільшій мірі відповідають наявним спостереженням. Нарешті, по-четверте, використання мови математики дозволяє точно і компактно викладати положення економічної теорії, формулювати її поняття і висновки.

Зміст математичного програмування складає теорія і методи розв'язування задач про знаходження екстремумів функції на множинах, які визначаються лінійними і нелінійними обмеженнями (рівностями і нерівностями).

Математичне програмування є одним із основних інструментів дослідження операцій – науки, що займається оптимізацією структури і функціонування великих організаційно-управлінських систем, незалежно від їх суспільного призначення. Прикладом систем можуть бути як народне господарство в цілому, так і окремі його галузі, а також великі підприємства, системи охорони здоров'я, освіти тощо.

Дослідження операцій включає всі етапи вивчення таких систем, починаючи виявленням мети роботи системи і мети дослідження та закінчуючи встановленням робочих процедур приведенням системи до стану оптимального функціонування. Роль математичного програмування полягає в знаходженні надійних і якомога простіших методів розв'язування відповідних математичних задач (моделей). Оскільки цей етап посідає одне з центральних місць у всьому дослідженні, розвитку математичного програмування приділяється постійна увага і тепер воно є найбільш досконалим і дійовим засобом дослідження операцій.

Кожна велика система функціонує заради досягнення певної мети. В ідеальному випадку ступінь її досягнення і вся сукупність операцій, що відбуваються в системі, мають кількісну міру, тобто можуть бути описані математично. Деякі з таких кількісних характеристик, позначимо їх $c_k$ $(k = 1,2,\dots,l)$, бувають незмінними, постійними для певної системи чи певних умов. Це так звані *параметри задачі* або *сталі фактори*. Інші мають характер змінних величин, незалежних і залежних, детермінованих чи випадкових. Незалежні змінні поділяють на дві групи:

- $x_j$ $(j = 1,2,\dots,n)$ – *ендогенні змінні* (*керовані змінні* або *залежні фактори*), значення яких можна змінювати в деякому інтервалі;
- $\alpha_i$ $(i = 1,2,\dots,s)$ – *екзогенні змінні* (*некеровані змінні*), значення яких не залежить від волі людей і визначається комплексом зовнішніх умов або ж параметрами системи; їх можна вважати *змінними параметрами задачі*.

При цих умовах, як правило, вдається встановити функціональну залежність між величиною $z$, якою вимірюється ступінь досягнення мети системи, і незалежними змінними та параметрами системи.

$$z = f\left(x_j, \alpha_i, c_k\right). \qquad (1.1)$$

Ця функція називається *цільовою функцією*, або *функцією ефективності*, або ж *оптимізуючою формою*, оскільки її значення є мірою ефективності роботи системи по досягненню певної мети.

Завдання полягає в тому, щоб вибрати такі значення керованих змінних $x_j$, які б надавали функції ефективності екстремального значення (максимуму або мінімуму), тобто слід знайти

$$z^* = \max_{x_j} f\left(x_j, \alpha_i, c_k\right) \text{ або } z^* = \min_{x_j} f\left(x_j, \alpha_i, c_k\right)$$

Однак можливості вибору значень керованих змінних практично завжди обмежені. Обмеження ці залежать насамперед від зовнішніх щодо системи умов, а також і від параметрів самої системи. Усі ці обмеження в ідеальному випадку також можна описати системою математичних рівностей та нерівностей

$$g_r\left(x_j, \alpha_i, c_k\right) \le = \ge 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.2}$$

[1]

Система (1.2) називається *системою обмежень*, або *системою умов* задачі.

Всякий набір змінних $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що задовольняє систему обмежень (1.2), називається *допустимим розв'язком* або *допустимим планом задачі математичного програмування*. Очевидно, кожний такий план зумовлює певний спосіб, стратегію, програму дій його реалізації, певне рішення стосовно роботи системи. Саме з словом „програма” (дій) і пов'язана назва предмета „математичне програмування”. Сукупність усіх розв'язків системи (1.2), тобто *множина допустимих планів*, утворює *область допустимих значень*, або *область означення* задачі математичного програмування.

Задача оптимізації цільової функції (1.1) при умовах (1.2), накладених на незалежні змінні, і є *загальною задачею математичного програмування*. Саме ця задача є *об'єктом* математичного програмування, а знаходження оптимуму цільової функції – його *метою*. Отже, *загальна задача математичного програмування – це задача відшукання умовного екстремуму цільової функції* (1.1) *при умовах* (1.2).

---

[1] Набір символів $(\le = \ge)$ означає, що для деяких значень біжучого індексу $r$ має місце нерівність $(\le)$, для інших – рівність $(=)$, для решти – нерівність $(\ge)$.

*Допустимий план, що надає цільовій функції оптимального значення, називається оптимальним. Оптимальний план* і є розв'язком задачі математичного програмування (1.1)–(1.2).

Як відомо, упорядкована сукупність значень $n$ змінних $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є точкою $n$-вимірного простору. В подальшому цю точку будемо позначати $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а сам оптимальний розв'язок $\vec{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$.

Оптимальні значення цільової функції записують одним з таких виразів:

$$z^*,\ z(x^*),\ opt\, z,\ z_{opt},\ \max z,\ z_{\max},\ \min z,\ z_{\min}.$$

Зауважимо, що в теоретичному плані всі задачі математичного програмування можна розглядати тільки як задачі мінімізації чи тільки як задачі максимізації. Справді, кожну задачу максимізації можна звести до задачі мінімізації, змінивши знак цільової функції. Дійсно, якщо в точці $x_0$ $z = f(x)$ досягає max, то $z_1 = -f(x)$ в точці $x_0$ досягає min (рис. 1.1). Так само задачі мінімізації можна звести до задач максимізації.

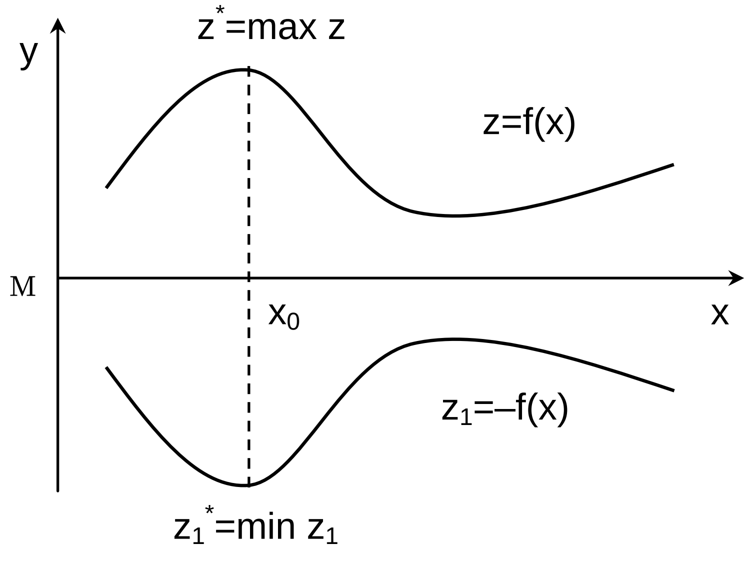



Рис. 1.1.

Система обмежень (1.2) задачі може бути сумісною або несумісною. Сумісна система обмежень визначає в m-вимірному точковому (векторному) просторі область означення задачі, інакше, множину допустимих планів. В більшості задач область означення обмежена, але трапляються випадки необмеженості множини допустимих планів. Це часто зумовлює необмеженість зверху чи знизу цільової функції задачі, що, звичайно, не відповідає дійсності і є результатом некоректної (неточної чи неправильної) постановки задачі, означаючи найчастіше відсутність якогось істотного обмеження. Формулювання задачі також буде некоректним, якщо система обмежень задачі несумісна, суперечлива; тоді множина допустимих планів задачі не містить, очевидно, жодного плану і буде порожньою. Таке положення найчастіше виникає через введення в задачу зайвих, насправді неістотних обмежень. Зауважимо також, що коректність постановки задачі потребує її стійкості в малому, тобто такої її структури, при якій всякій малій зміні параметрів задачі відповідає мала зміна або незмінність її розв'язку. Ця вимога пов'язана з тим, що параметри всякої конкретної практичної задачі визначаються наближено, з певною точністю; при цьому задана точність визначення параметрів не повинна впливати на результати розв'язку.

Під прийняттям рішень у дослiджені операцій розуміють складний процес, в якому можна виділити наступні чотири етапи:

**1-й етап**. Побудова якісної моделі проблеми, що розглядається, тобто виявлення факторів, які є найбільш важливими, і встановлення закономірностей, яким вони підпорядковуються.

Звичайно, цей етап виходить за межі математики.

**2-й етап**. Побудова математичної моделі проблеми, що розглядається, тобто запис у математичних термінах якісної моделі. Таким чином, математична модель – це записана у математичних символах абстракція реального явища, так сконструйована, щоб аналіз її давав можливість проникнути у сутність явища.

Цей етап включає побудову цільової функції (1.1) і системи обмежень (1.2).

В результаті цих двох етапів формується відповідна математична задача.

Другий етап вже потребує залучення математичних знань.

**3-й етап**. Дослідження впливу змінних на значення цільової функції.

Цей етап передбачає володіння математичним апаратом для розв'язання математичних задач, які виникають на другому етапі процесу прийняття рішень. Теорія й методи розв'язання цих задач як раз і складають зміст математичного програмування.

**4-й етап**. Співставлення результатів обчислень, отриманих на 3-ому етапі, з об'єктом, який моделювався, тобто експертна перевірка результатів (критерій практики).

Таким чином, на цьому етапі встановлюється ступінь адекватності моделі і об'єкту у межах точності вихідної інформації.

## 1.2. Моделювання в економіці. Типи моделей

В наш час в літературних джерелах нараховується декілька десятків визначень поняття „модель", які відрізняються одне від одного. Проте це поняття відомо кожному: наприклад, іграшковий літак, паперовий голуб – моделі літака. Менш звичне уявлення про те, що фотознімок пейзажу, географічна карта – це модель місцевості. Знайома з шкільних років формула шляху $S = vt$ – математична модель. *Під моделлю будемо розуміти умовний образ якого-небудь об'єкту, який наближено відтворює цей об'єкт за допомогою деякої мови*.

Будь-яке економічне дослідження завжди передбачає об'єднання теорії (економіко-математичні моделі) і практики (статистичні дані). Ми використовуємо теоретичні моделі для опису і пояснення процесів, що спостерігаються, та збираємо статистичні дані з метою емпіричної побудови і обґрунтування моделей.

Для вивчення різних економічних явищ економісти використовують їх спрощені формальні описи, які називаються економіко-математичними моделями. *Економіко-математична модель – математичний опис досліджуваного економічного процесу*. В економіко-математичних моделях об'єктом є економічний процес (наприклад, використання ресурсів, розподіл виробів між різними типами обладнання і т.п.), а мовою – класичні або спеціально розроблені математичні методи.

Прикладами економіко-математичних моделей є моделі споживацького вибору, моделі фірми, моделі економічного росту, моделі рівноваги на товарних, факторних і фінансових ринках і багато інших. Будуючи моделі економісти виявляють суттєві фактори, які визначають досліджуване явище і відкидають деталі, які несуттєві для розв'язку поставленої проблеми. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об'єктів дозволяє оцінити можливі наслідки впливу на них і використовувати такі оцінки в управлінні.

Процедура економіко-математичного моделювання замінює трудомісткі натуральні експерименти, що дорого коштують, розрахунками. Дійсно, при використанні економіко-математичних методів достатньо швидко і дешево робиться на ЕОМ порівняння багаточисельних варіантів планів і управлінських рішень. В результаті обираються найбільш оптимальні варіанти.

Слід розрізняти математичну структуру моделі та її змістовну інтерпретацію. Розглянемо наступних два простих приклади.

---

**Приклад 1.1.** Нехай треба визначити, яку суму коштів слід покласти у банк при заданій ставці проценту (20% річних), щоб через рік отримати €12000?

*Розв'язання.* Введемо формальні позначення для величин, які фігурують в задачі:

початкова сума – $M_0$,

кінцева сума – $M_1$,

ставка процента – $R$

і записавши співвідношення між ними

$$M_1 = M_0\left(1+\frac{R}{100}\right),$$

знайдемо шукану величину з розв'язку основного рівняння моделі

$$M_0 = \frac{M_1}{1 + R/100} = \frac{12000}{1{,}2} = 10000\,.$$

Шукана сума дорівнює €10000.

---

**Приклад 1.2.** Нехай треба визначити, який був об'єм випуску продукції заводу, якщо в результаті технічного переобладнання середня продуктивність праці збільшилась на 20%, і завод став випускати 1200 одиниць продукції.

*Розв'язання.* Введемо формальні позначення для величин, які фігурують в задачі:

початковий випуск – $Q_0$,

кінцевий випуск – $Q_1$,

процент приросту продуктивності – $R$

і записавши співвідношення між ними (виходячи з визначення середньої продуктивності праці $L = Q/T$ , де $T$ – нормативний період часу)

$$\frac{Q_1}{L_1} = \frac{Q_0}{L_0}, \qquad Q_1 = Q_0\frac{L_1}{L_0} = Q_0\left(1 + \frac{L_1 - L_0}{L_0}\right) = Q_0\left(1 + \frac{R}{100}\right),$$

знайдемо шукану величину з розв'язку основного рівняння моделі

$$Q_0 = \frac{Q_1}{1 + R/100} = \frac{12000}{1{,}2} = 10000\,.$$

---

Порівнюючи отримані моделі і результати, ми можемо помітити, що математична форма моделі

$$X_1 = X_0\left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

та навіть числові значення величин, що входять в модель, в обох випадках однакові, однак економічна ситуація, яка описується моделлю, економічна інтерпретація моделі і результатів розрахунку абсолютно різні. Таким чином, одні й ті ж математичні моделі і методи можуть бути використані для розв'язку різних економічних задач.

Економіко-математичні моделі дозволяють виявити особливості функціонування економічного об'єкту і на основі цього передбачати майбутню поведінку об'єкта при зміні яких-небудь параметрів. Передбачення майбутніх змін, наприклад, підвищення обмінного курсу, погіршення економічної кон'юнктури, падіння прибутку може спиратися лише на інтуїцію. Однак при цьому можуть бути упущені, невірно оцінені, важливі взаємозв'язки економічних показників, які впливають на ситуацію, що розглядається. В моделі всі взаємозв'язки змінних можуть бути оцінені кількісно, що дозволяє отримати більш якісний і надійний прогноз.

Для будь якого економічного суб'єкту можливість прогнозування ситуації означає, перш за все, одержання кращих результатів або уникнення збитків, у тому числі й в державній політиці.

За своїм визначенням будь-яка економічна модель абстрактна і, отже, неповна, оскільки виділяючи найбільш суттєві фактори, які визначають закономірності функціонування економічного об'єкту, вона абстрагується від інших факторів, які, незважаючи на свою відносну малість, все ж у сукупності можуть визначати не тільки відхилення у поведінці об'єкту, але й саму його поведінку. Так, у простіший моделі, попит на який-небудь товар визначається його ціною і доходом споживача. На справді ж на величину попиту впливає також ряд інших факторів: смаки і очікування споживача, ціни на інші товари, вплив реклами, моди та інші. Звичайно вважають, що всі фактори, які не враховані в економіко-математичній моделі, впливають на об'єкт у тому аспекті, що нас цікавить, відносно мало. Склад врахованих в моделі факторів та її структура можуть бути уточнені в процесі удосконалення моделі.

Математична модель економічного об'єкту – це його гомоморфне[2] відображення у вигляді сукупності рівнянь, нерівностей, логічних відношень, графіків. Гомоморфне відображення об'єднує групи відношень

[2] Гомоморфізм – відображення, яке зберігає базові операції та відношення.

елементів об'єкту, що вивчається, в аналогічні відношення елементів моделі. Передбачається, що вивчення моделі дає нові знання про об'єкт, або дозволяє визначити найкраще рішення у тій чи іншій ситуації.

Для опису основних видів елементів економіко-математичної моделі розглянемо конкретну ситуацію і побудуємо відповідну їй модель.

Нехай, є фірма, яка випускає декілька видів продукції. У процесі виробництва використовуються три види ресурсів: обладнання, робоча сила і сировина; ці ресурси однорідні, кількість їх відома і у даному виробничому циклі збільшені бути не можуть. Задані витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції кожного виду. Задані ціни продуктів. Необхідно визначити об'єми виробництва з метою максимізації вартості випущеної продукції (або, у припущені, що вся вона знайде збут на ринку – загального прибутку від реалізації).

Для розв'язку поставленої задачі необхідно побудувати математичну модель, наповнити її інформацією, а потім провести по ній необхідні розрахунки. На початку при побудові моделі необхідно визначити індекси, екзогенні і ендогенні змінні і параметри. В нашій задачі свій індекс повинен мати кожен вид продукції (нехай це індекс $j$, який змінюється від 1 до $n$), а також вид ресурсів. Далі опишемо екзогенні змінні – ті, які задаються зовні моделі, тобто відомі заздалегідь, і параметри – це коефіцієнти рівнянь моделі. Часто екзогенні змінні і параметри в моделях не розділяють. В нашій задачі задані екзогенні змінні – кількість обладнання $P$, робочої сили $R$ і сировини $Q$, які є в наявності (їм можна надати індекс $i$, якій змінюється від 1 до 3); задані параметри – коефіцієнти їх витрат на одиницю $j$-ої продукції $p_j, r_j$ і $q_j$ відповідно. Ціни продуктів $c_j$ також відомі.

Далі вводяться позначення для ендогенних змінних – тих, що визначаються в процесі розрахунків по моделі і не задаються в ній зовні. В нашому випадку – це невідомі об'єми виробництва продукції кожного *j*-го виду, які позначимо $x_j$.

Після закінчення опису змінних і параметрів переходять до формалізації умов задачі та опису її допустимої множини і цільової функції. В нашій задачі допустима множина – це сукупність всіх варіантів виробництва, які забезпечуються наявними ресурсами. Вона описується за допомогою системи нерівностей:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \le P \qquad \qquad \sum_{j=1}^{n} p_jx_j \le P$$

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n \le R \qquad \text{або} \qquad \sum_{j=1}^{n} r_jx_j \le R$$

$$q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n \le Q \qquad \qquad \sum_{j=1}^{n} q_jx_j \le Q$$

До цих обмежень по ресурсам додаються вимоги невід'ємності змінних

$$x_j \ge 0$$

Якщо який-небудь ресурс необхідно було б використати повністю (наприклад, повністю зайняти всю робочу силу), то відповідна нерівність перетворилась би у рівність. Це звузило б допустиму множину і, можливо, виключило би з нього початковий найкращий розв'язок.

Якщо модель є оптимізаційною (а дана модель така), то поряд з обмеженнями повинна бути виписана цільова функція. Для даної задачі максимізується величина вартості виготовленої продукції

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max .$$

Поставлена задача далеко не завжди добре описує ситуацію і відповідає задачам особи, що приймає рішення. Наприклад, може бути, що:

1) ресурси у деякій степені взаємозамінні;
2) затрати ресурсів не строго пропорційні випуску (є сталі затрати, які не пов'язані з об'ємом випуску; граничні затрати змінюються);

3) об'єми ресурсів не строго фіксовані, вони можуть закуповуватись і продаватись, братися або здаватися в оренду;
4) всередині кожного виду ресурсів можна виділити складові, які функціонально або якісно розрізняються, у тій чи іншій мірі замінюючи або доповнюючи одна одну і по-різному впливаючи на об'єм випуску;
5) ціна продукту може залежати від об'єму її реалізації, теж саме стосується ціни ресурсу;
6) фірма може використовувати одну з кінцевого набору технологій (або поєднувати декілька таких технологій), які характеризуються певною комбінацією ресурсів, які використовуються;
7) різні одиниці отриманого прибутку можуть мати різну цінність для особи, що приймає рішення (це обумовлено, наприклад, особливостями податкової системи);
8) інтереси і переваги суб'єкту не обмежуються максимізацією об'єму прибутку, тому цільова функція повинна враховувати й інші кількісні і якісні показники;
9) для суб'єкту реальна задача не обмежується одним моментом або періодом часу, важливими є динамічні взаємозв'язки;
10) на ситуацію можуть впливати випадкові фактори, які необхідно прийняти до уваги.

Багато розділів економічної теорії присвячені вивченню, опису и моделюванню (з тією чи іншою ступеню деталізації та у різних комбінаціях) перерахованих аспектів на різних рівнях господарської діяльності.

Математичні моделі, які використовуються в економіці, можна поділити на класи за рядом ознак, які відносяться до особливостей об'єкту, мети моделювання і використаного інструментарію: моделі макро- і мікроекономічні, теоретичні і прикладні, оптимізаційні і рівноважні, статичні і динамічні.

*Макроекономічні моделі* описують економіку як єдине ціле, зв'язуючи між собою укрупнені матеріальні і фінансові показники: валовий національний продукт, споживання, інвестиції, зайнятість, процентну ставку, кількість коштів та інші. *Мікроекономічні моделі* описують взаємодію структурних і функціональних складових економіки, або поведінку окремої такої складової у ринковому середовищі. Внаслідок розмаїтості типів економічних елементів і форм їх взаємодії на ринку, мікроекономічне моделювання займає основну частину економіко-математичної теорії. Найбільш важливі теоретичні результати в мікроекономічному моделюванні в останні роки отримані при дослідженні стратегічної поведінки фірм в умовах олігополії з використанням апарату теорії ігор.

*Теоретичні моделі* дозволяють вивчати загальні властивості економіки та її характерних елементів дедукцією висновків з формальних передумов. *Прикладні моделі* дають можливість оцінити параметри функціонування конкретного економічного об'єкту і сформулювати рекомендації для прийняття практичних рішень. До прикладних відносяться перш за все економічні моделі, які оперують числовими значеннями економічних змінних і дозволяють статистично оцінювати їх на основі наявних спостережень.

У моделюванні ринкової економіки особливе місце займають *рівноважні моделі.* Вони описують такі стани економіки, коли результуюча всіх сил, які намагаються вивести її з даного стану, рівна нулю. У неринковій економіці нерівновага за одними параметрами (наприклад, дефіцит), компенсується іншими факторами (чорний ринок, черги і т.п.). Рівноважні моделі дескриптивні, описові. В Україні тривалий час переважав нормативний підхід у моделюванні, який заснований на *оптимізації***.** Оптимізація у теорії ринкової економіки присутня в основному на мікрорівні (максимізація корисності споживачів або прибутку фірми);

на макрорівні наслідком раціонального вибору поведінки економічних суб'єктів є деякий стан рівноваги.

У *статичних моделях* описується стан економічного об'єкту в конкретний момент або період часу; *динамічні моделі* містять взаємозв'язки змінних у часі. В статичних моделях звичайно зафіксовані значення ряду величин, які є змінними у динаміці, – наприклад, капітальних ресурсів, цін і т.п. Динамічна модель не зводиться до простої суми ряду статичних, а описує сили і взаємодії в економіці, які визначають хід процесів у ній. Динамічні моделі звичайно використовують апарат диференціальних і різницевих рівнянь, варіаційного числення.

*Детерміновані моделі* передбачають жорсткі функціональні зв'язки між змінними моделі. *Стохастичні моделі* допускають наявність випадкових впливів на досліджувані показники і використовують інструментарій теорії ймовірностей і математичної статистики для їх опису.

## 1.3. Класифікація задач математичного програмування

Класифікація задач математичного програмування залежить від критерію, згідно за яким вона проводиться. Маючи на увазі, насамперед, застосування математичних методів в економіці, можна було б провести таку класифікацію за якісно відмінними між собою типами економічних процесів. Однак такий підхід більш природний при класифікації моделей економічних процесів. Математичне програмування передусім строго математична дисципліна і тому критеріями класифікації мають бути, в основному, математичні структури (властивості) задач і методів їх розв'язування.

В математичному програмуванні можна виділити два напрямки. До першого відносяться детерміновані задачі. До другого – стохастичні задачі. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних і параметрів, що підлягають статистичним розподілам. Очевидно, і у відповідних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі. Якщо ж ці явища становлять суть процесу чи помітно впливають на його перебіг, то адекватна математична модель буде стохастичною, тобто такою, що містить випадкові функції і величини. Відповідний розділ математичного програмування, що займається вивченням структури і розв'язуванням цих задач, називається *стохастичним програмуванням*.

Два великих і основних класи становлять *лінійні* і *нелінійні* задачі. Критерієм лінійності задач є лінійність цільової функції (1.1) та всіх обмежень (1.2), тобто вони не повинні містити інших, ніж одиниця і нуль, степенів змінних $x_j$ та будь-яких добутків цих змінних. В усіх інших випадках задача буде нелінійною. Величезною перевагою лінійних задач є те, що вони завжди розв'язуються; створено універсальні відносно прості методи знаходження їх розв'язку (симплексний метод). Однак часто лінійна модель буває неадекватною і доводиться будувати нелінійні моделі, розв'язати які набагато складніше. Загального універсального методу знаходження розв'язку таких задач немає. Для окремих типів нелінійних задач розроблено значну кількість спеціальних методів розв'язування. Тому і математичне програмування поділяють на два основні розділи: *лінійне програмування* і *нелінійне програмування*.

В лінійному програмуванні існують класи задач, структура яких дозволяє створити спеціальні методи їх розв'язування, які вигідно відрізняються від методів розв'язування задач загального характеру. Так, в лінійному програмуванні з'явився розділ *транспортних задач*.

Нелінійне програмування прийнято підрозділяти наступним чином:

*Опукле програмування* – коли опукла цільова функція (якщо розглядається задача її мінімізації) і опукла множина, на якій розв'язується екстремальна задача.

*Квадратичне програмування* – коли цільова функція квадратична, а обмеження – лінійні рівності і нерівності.

*Дробово-лінійне програмування* – коли цільова функція дробово-лінійна, а обмеження – лінійні рівності і нерівності.

*Багатоекстремальні задачі.* Тут звичайно виділяють спеціалізовані класи задач, які часто зустрічаються у застосуваннях, наприклад, задачі про мінімізацію на опуклій множині угнутих функцій.

Далі розрізняють *дискретні* та *неперервні* задачі. Дискретною називають задачу з усіма або деякими змінними, які набувають лише певних дискретних, зокрема цілочисельних значень. Методи розв'язування таких задач увійшли до розділу *дискретного*, зокрема *цілочисельного програмування*. Якщо всі змінні можуть набувати всіх значень у деяких інтервалах числової осі, то задача буде *неперервною*.

Тепер розглянемо відмінність між однокроковими і багатокроковими, або *динамічними* і *статичними* задачами. Багатокроковість як метод розв'язування задач математичного програмування, пов'язана насамперед з багатовимірністю задачі, коли, послідовно застосовуючи індукцію, крок за кроком знаходять оптимальні значення множини змінних. Необхідність приймати рішення поетапно пов'язана також і з тим, що істотну роль в задачі відіграє фактор часу чи деяка визначена послідовність операцій. Методи розв'язування багатокрокових задач об'єднано в розділ, що називається *динамічним програмуванням*. Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти вектора оптимального плану задачі визначають одночасно за один останній крок алгоритму. Багато задач математичного програмування можна розглядати і як однокрокові, і як багатокрокові, залежно від способу їх розв'язування. Якщо задачу можна розв'язати як однокрокову, методи динамічного програмування недоцільні. Проте цілий ряд задач можна розв'язати лише при умові послідовного прийняття певних рішень.

У чому специфіка задач математичного програмування?

По-перше, до задач математичного програмування не можна, як правило, застосувати методи класичного аналізу для відшукання умовних екстремумів, так як навіть у найбільш простих задачах – лінійних – екстремум досягається у кутових точках границі множини допустимих значень, тобто у точках, де порушується диференційованість. Та найбільш сильний метод розв'язування екстремальних задач в класичному аналізі – метод множників Лагранжа, розроблений для випадку, коли множина умов задається системою рівностей, а не системою нерівностей.

Другою специфічною особливістю є те, що в практичних задачах число змінних і обмежень настільки велике, що якщо просто перебирати всі точки, які „підозрілі на екстремальність" (наприклад, всі кутові точки множини допустимих значень), то навіть сучасній ЕОМ буде не легко впоратись з цією задачею у розумні терміни.

У зв'язку зі сказаним, метою математичного програмування є створення, де це можливо, аналітичних методів пошуку розв'язків, а при відсутності таких методів – створення ефективних обчислювальних способів наближеного розв'язування.

## 1.4. Приклади задач математичного програмування

Багато різних за реальним змістом задач лінійного програмування мають подібну математичну структуру, певні особливості якої можна успішно використати при побудові алгоритмів розв'язування цих задач. Виходячи з цієї подібності, всі задачі лінійного програмування часто поділяють на дві великі групи. Типовими задачами першої групи є задачі на добір оптимальної суміші сплавів та на складання оптимального раціону. За ними закріпилась назва *задачі про раціон*.

Типовими задачами другої групи є транспортна задача і задача про оптимальний добір. Ці задачі називаються *задачами розподільчого типу*.

**Задача на складання суміші сплаву**. Нехай потрібно виплавити новий сплав, що містить $a$% свинцю, $b$% цинку і $d$% олова. Припустимо, що в розпорядженні підприємства є $n$ різних сплавів, кожний з яких містить $p_{1j}$% свинцю, $p_{2j}$% цинку і $p_{3j}$% олова і може бути використаний для виробництва нового сплаву. Ціна одного кілограма *j*-го сплаву дорівнює $c_j\ (j=1,2,\ldots,n)$. Завдання полягає в тому, щоб визначити, яку кількість кожного сплаву потрібно затратити на кожний кілограм нового сплаву, щоб він був найдешевшим. Позначивши шукані величини $x_j$, одержимо цільову функцію

$$z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\min, \tag{1.3}$$

яку слід мінімізувати при такій системі обмежень

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}p_{1j}x_j=a\\&\sum_{j=1}^{n}p_{2j}x_j=b\\&\sum_{j=1}^{n}p_{3j}x_j=d\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$x_j\ge 0. \tag{1.5}$$

**Задача про оптимальний добір в племінній справі**. Велике значення в підвищенні ефективності тваринництва має племінна робота. Одним з найважливіших завдань при цьому є правильний добір самця-плідника до самок маточного поголів'я. В умовах штучного запліднення, яке тепер є основним, за одним самцем закріплюється ціла група маток, кількістю від кількох сотень до кількох тисяч. Нехай, у певному господарстві, чи зоні, що включає групу господарств, усе маточне поголів'я розподілене на $N$ груп згідно з деякою сукупністю ознак, які визначають продуктивність нащадків, наприклад, належність до однієї породи та лінії, умови утримання, годівлі тощо. Позначимо кількість кожної групи $n_j\ (j=1,2,\ldots,N)$, так що $\sum_{j=1}^{N}n_j=n$ – загальне число маток. Припустимо, що кожний з наявних у господарстві $m$ самців-плідників випробуваний на певній кількості маток кожної $j$-ї групи, в результаті чого добуто відповідні статистичні (вибіркові) середні продуктивної якості нащадків кожного $i$-го самця по кожній $j$-й групі маток. Позначимо ці величини $c_{ij}$, а максимальну здатність $i$-го самця-плідника $(i = 1, 2, \ldots, m)$ в рік – через $p_i$, що означає максимально можливе число маток, запліднюваних $i$-м самцем. Тепер задачу лінійного програмування можемо сформулювати так. Знайти цілочислову матрицю

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

таку, щоб лінійна форма

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{1.6}$$

набувала максимального значення при системі умов:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = n_j \quad (j = 1, 2, \ldots, N); \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \le p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m); \tag{1.8}$$

$$0 \le x_{ij} \le n_j, \tag{1.9}$$

де $x_{ij}$ – означає кількість маток $j$-ї групи, що запліднюються $i$-м самцем.

Наведемо приклади задач нелінійного програмування.

**Задача оптимального вибору факторів виробничої функції**. Нехай, $z$ – кількість деякого продукту, на виробництво якого витрачаються певні ресурси в кількостях $x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. При цьому, якщо вартість одиниці $j$-го ресурсу $c_j$, то загальні витрати виробництва

$$w = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n. \tag{1.10}$$

Нехай, відома також залежність величини $z$, вираженої в натуральних чи вартісних одиницях, від кількостей використаних в процесі виробництва ресурсів $x_j$, які виступають як фактори виробництва,

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1.11}$$

Вид та параметри функції (1.11) залежать від технології виробництва і, як правило, встановлюються статистичними методами. Найбільше застосування дістала виробнича функція Коббо-Дугласа

$$z = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}. \tag{1.11a}$$

Зрозуміло, що

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{1.12}$$

В даному випадку можна сформулювати дві взаємозв'язаних задачі математичного програмування протилежного змісту.

***Перша задача***: при заданому об'ємі загальних витрат на виробництво продукції $w = const$, тобто при заданих асигнуваннях максимізувати випуск продукції $z \to \max$.

***Друга задача***: при заданому об'ємі виробництва даної продукції $z = const$ мінімізувати величину загальних витрат на її виробництво $w \to \min$.

Цільовою функцією першої задачі є функція (1.11), а обмеженнями – співвідношення (1.10), (1.12); для другої задачі цільовою функцією являється функція (1.10), а обмеженнями – співвідношення (1.11), (1.12).

**Задача оптимізації розмірів закуповуваних партій товарів**. Припустимо, що деякій організації на плановий період необхідні певні матеріали в об'ємах $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ці матеріали витрачаються рівномірно в часі і зберігаються на одному складі, місткістю $b$ об'ємних одиниць, причому $b < a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, так що одночасно розмістити на складі всі матеріали неможливо і необхідно провести кілька закупок цих матеріалів партіями по $x_j$ об'ємних одиниць кожного $j$-го товару $(j = 1,2,\ldots,n)$. Вартість зберігання на складі об'ємної одиниці $j$-го матеріалу дорівнює

$c_j$, так що зберігання $x_j$ одиниць товару протягом часу його використання коштуватиме $\frac{1}{2}c_j x_j$. Припустимо, що вартість кожної закупки $j$-го матеріалу не залежить від розміру партії $x_j$ і дорівнює $s_j$. Необхідно визначити оптимальні розміри закуповуваних партій так, щоб мінімізувати загальні витрати на зберігання і закупку матеріалів. Отже, цільова функція задачі

$$z = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{1}{2} c_j x_j + s_j \frac{a_j}{x_j} \right) \to \min \qquad (1.13)$$

при умові, що сумарний об'єм закуповуваних партій не перевищить місткості складу

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le b\,. \qquad (1.14)$$

Очевидно,

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \qquad (1.15)$$

**Задача про режим роботи енергосистеми**. В якості приклада задачі опуклого програмування розглянемо простішу задачу про оптимальне ведення режиму роботи енергосистеми.

Розглядається ізольована енергосистема, яка складається з теплоелектростанцій, зв'язаних лініями передач з вузлом, в якому зосереджене навантаження. Ставиться задача розподілу активних потужностей між електростанціями у заданий момент часу. Розподіл здійснюється за критерієм мінімізації сумарних паливних витрат на генерацію активної потужності.

Позначимо через $x_j$ активну потужність, яка генерується на $j$-й електростанції. Потужності $x_j$ лежать у межах, які визначаються технічними умовами: $\alpha_j \le x_j \le \beta_j$. Крім того, повинно виконуватись умова балансу потужностей, тобто загальна потужність, що генерується, повинна відповідати потужності $P$, яка споживається, з урахуванням загальних втрат $\pi$ у лініях передач:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = P + \pi .$$

Втрати палива на генерацію потужності $x_j$ являють собою функцію $T_j(x_j)$, яка опукла на відрізку $[\alpha_j, \beta_j]$.

Таким чином, задача приймає вигляд:

$$\sum_{j=1}^{m} T_j(x_j) \to \min \tag{1.16}$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = P + \pi \tag{1.17}$$

$$\alpha_j \le x_j \le \beta_j, \ (j = 1,2,\ldots,m). \tag{1.18}$$

Побудована модель є типовою задачею опуклого програмування з лінійними обмеженнями. Розв'язок цієї задачі дає вельми грубе наближення до дійсно оптимального режиму роботи енергосистеми. У реальній ситуації не можна вважати все навантаження зосередженим в одному вузлі, а слід розглядати $n$ вузлів. Крім того, втрати в системі, природно не є сталими, а залежать від параметрів ліній передач та величин потужностей, що передаються.

В якості наступного наближення можна розглядати задачу, в якій $\pi$ є білінійною функцією $x_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m)$, де параметри управління $x_{ij}$ означають кількість активної потужності, яка передається з $j$-й електростанції у $i$-й вузол.

Очевидно, що в цієї нової моделі умови будуть містити нелінійності ($\pi(x_{ij})$ в рівнянні балансу).

**Задача про розміщення**. Ця простіша задача про розміщення є прикладом багатоекстремальної задачі.

Є $m$ можливих пунктів виробництва, причому відома для кожного $i$-го пункту залежність вартості виробництва $f_i$ від об'єму виробництва

$x_i$ (передбачається, що у вартість виробництва $f_i(y_i)$ включені капітальні витрати). Дані $n$ пунктів споживання із заданим об'ємом споживання $b_j$ у кожному пункті. Нарешті, задана матриця транспортних витрат $(a_{ij})$ ($a_{ij}$ – вартість перевезення одиниці продукції з *i*-го пункту виробництва в *j*-й пункт споживання). Необхідно знайти такі об'єми виробництва $y_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, які мінімізують сумарні витрати; інакше кажучи, шукається

$$L(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i(y_i) \to \min \tag{1.19}$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \, , \tag{1.20}$$

$$x_{ij} \geq 0 \, . \tag{1.21}$$

Оскільки собівартість одиниці продукції звичайно спадає при збільшені об'єму виробництва, то функції $f_i(y_i)$, як правило, монотонно зростають і опуклі вгору. Множина значень $x_{ij}$, що задовольняє обмеження задачі, утворює опуклий многокутник, вершини якого є точками локальних мінімумів функції $L(x_{ij})$ (рис.1.2).

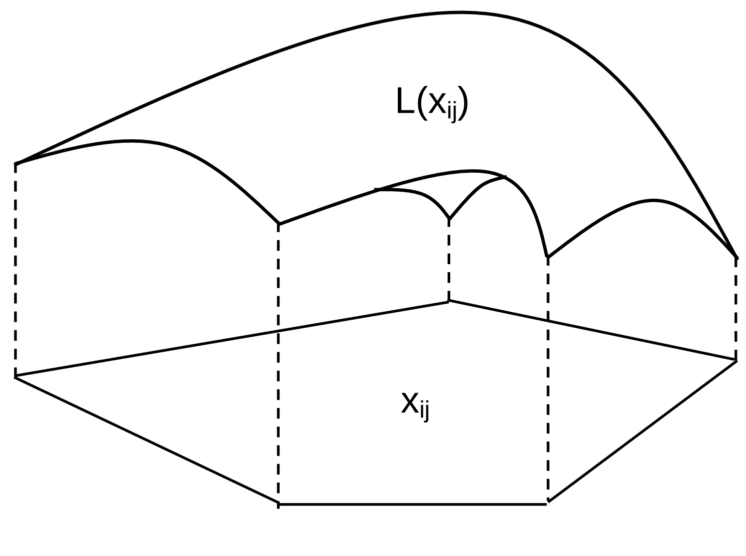



Рис. 1.2

Звідси й назва подібних задач – багатоекстремальні.

Доцільно зазначити, що за своїм реальним змістом більшість задач математичного програмування є задачами або мінімізації витрат ресурсів на виробництво заданих кількостей продукції, або ж максимізації випуску продукції (прибутку) при заданих обмежених кількостях ресурсів.

## 1.5. Коротка історична довідка

Історія предмета включає в себе, з одного боку, історію математичних джерел та методів, а з другого – історію застосування цих методів у прикладних галузях, насамперед в економіці.

Як найпершу економічну модель, що містила деякі найпростіші ідеї лінійного програмування, слід назвати „Економічні таблиці" лейбмедика короля Людовика XV Ф. Кене, складену ним близько 1758 р., в якій було запропоновано кількісну модель національної економіки. У цій праці він поділив економіку Франції на три частини:

1) виробничий сектор, включаючи великих власників землі;
2) сектор торгівлі, що складався із купців та ремісників;
3) сектор нерухомості, що включав майно дворянства, церкви та королів.

Математичні моделі використовувались з ілюстративними і дослідницькими цілями також А. Смітом (класична макроекономічна модель), Д. Рікардо (модель міжнародної торгівлі).

З відомих нам математичних робіт основному методу лінійного програмування – симплексному – передували праці Ш. Фур'є (1823 р.), який розглядав задачу визначення найменшого максимального відхилення в розв'язках систем рівнянь. Ним ця задача була зведена до знаходження найнижчої точки многогранника n-вимірного простору, яку визначали послідовним перебором усіх вершин многогранника. Ідея Фур'є і лягла в основу симплексного методу.

У XIX сторіччі великий внесок у моделювання ринкової економіки внесла математична школа (Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето, Ф. Еджворт). В 1874 р. Л. Вальрас запропонував складну математичну модель економіки, що містила технологічні коефіцієнти.

У XX сторіччі математичні методи моделювання застосовувались дуже широко, з їх використанням зв'язані практично всі роботи, визначені Нобелевською премією в економіці (Д. Хігс, Р. Солоу, В. Леонтьєв, П. Самуєльсон). Розвиток мікроекономіки, макроекономіки, прикладних дисциплін зв'язано з усе більш високим рівнем їх формалізації. Основу для цього заклав прогрес в області прикладної математики – теорії ігор, математичного програмування, математичної статистики.

У 1926 р. в СРСР був опублікований баланс народного господарства, що містив усі основні ідеї і риси моделі міжгалузевого балансу, яка є методом математичного аналізу міжгалузевих економічних зв'язків.

Ґрунтуючись на цих ідеях, американський економіст В. Леонтьєв створив кількісну модель американської економіки, яка давала можливість простежити вплив урядової політики і тенденції у сфері закупок на цілий ряд промислових галузей, тісно взаємозв'язаних між собою.

Вперше задачу оптимізації плану перевезень з метою мінімізації їх сумарного кілометражу було поставлено в роботі радянського економіста А. Н. Толстого в 1930 р.

Угорський математик Б. Егерварі в 1931 р. сформулював задачу оптимального вибору і дав метод її розв'язування, що дістав назву угорського методу.

Проте, справжнім початком математичного (лінійного програмування) в його сучасному вигляді слід вважати праці радянського математика академіка Л. В. Канторовича, який у 1939 р., зайнявшись плануванням роботи агрегатів фанерної фабрики, розв'язав декілька задач: про найкраще завантаження обладнання, про розкрій матеріалів з найменшими втратами, про вантажі по декільком видам транспорту та ін. Л.В. Канторович сформулював новий клас умовно-екстремальних задач і запропонував універсальний метод їх розв'язування, що поклало початок новому напряму прикладної математики – лінійному програмуванню.

Значний внесок у формування і розвиток математичного програмування внесли зарубіжні вчені Р. Акоф, Р. Белман, Г. Данциг, Г. Кун, Дж. Нейман, Т. Сааті, Р. Черчмен, А. Кофман. Так, наприклад, американський математик Р. Белман заклав основи динамічного програмування (1954).

У 1960 – 80-і роки економіко-математичний напрямок на Україні був пов'язаний в основному зі спробами формально описати „систему оптимального функціонування соціалістичної економіки”. Будувалися багаторівневі системи моделей народногосподарського планування, оптимізаційні моделі галузей і підприємств. Зараз важливою задачею є моделювання процесів перехідного періоду.

## Питання для самоконтролю

1. Чому необхідно використання математики в економіці?
2. Які змінні економіко-математичної моделі називаються екзогенними, а які – ендогенними?
3. Що є загальною задачею математичного програмування?
4. Що називається оптимальним планом?
5. Що таке економіко-математична модель?
6. Нехай, в моделі, яка наведена у підрозділі 1.2, уся сировина повинна бути використана повністю. Як при цьому зміниться обмеження на сировину?
7. Якщо в моделі, яка наведена у підрозділі 1.2, припустити, що кількість робочої сили може змінюватись, то чи необхідно буде змінювати обмеження або цільову функцію?
8. В моделі, яка наведена у підрозділі 1.2, ресурси являються взаємозамінними чи ні?
9. За якими ознаками класифікуються задачі математичного програмування?
10. Які основні типи задач лінійного програмування?
11. Як підрозділяється нелінійне програмування?
12. Які основні періоди розвитку математичного програмування як прикладної науки?

## Вправи

Побудувати економіко-математичні моделі до задач у загальних постановках та вказати, які змінні будуть екзогенними, а які – ендогенними? До якого типу відноситься модель задачі: макроекономічних чи мікроекономічних?

1.1. Нехай підприємство має $m$ видів ресурсів у заданих кількостях $b_1, b_2, \dots, b_m$, які використовуються для виготовлення $n$ різних типів готової продукції. Відомі собівартості одиниці продукції $j$-го типу – $p_j$ $(j = 1,2,\dots,n)$ і нормативні витрати $a_{ij}$ $i$-го ресурсу $(i = 1,2,\dots,m)$ на її виготовлення. Потрібно визначити обсяги випуску продукції кожного типу, щоб загальна собівартість усієї продукції була найнижчою.

1.2. Для виробництва одного виду продукції використовується $n$ різних технологій із $m$ видів ресурсів. При цьому, $j$-та технологія дає $p_j$ одиниць готової продукції за одиницю часу та використовує $a_{ij}$ одиниць $i$-го ресурсу, загальна кількість якого $b_i$ $(i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n)$. Знайти час використання $j$-ої технології для того, щоб із даних ресурсів було випущено найбільше продукції.

1.3. Торгівельне підприємство планує свою роботу на період $T$. Ресурси підприємства на цей період становлять: торгівельні площі – $b_1$ м²; фонд робочого часу – $b_2$ годин; витрати обігу – $b_3$ гривень. Якими повинні бути кількості $x_1, x_2, \dots, x_n$ різних товарів на даний період функціонування $T$, щоб мати найбільший прибуток, якщо відомі час реалізації кожного з видів товару $t_1, t_2, \dots, t_n$, прибутки від продажу відповідної одиниці товару $p_1, p_2, \dots, p_n$, нормативні витрати торговельної площі $a_{1k}$ та витрати обігу $a_{3k}$ $(k = 1,2,\dots,n)$.

1.4. $n$ клієнтів мають можливість взяти кредит у розмірах $g_1, g_2, \ldots, g_n$ гривень на строки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ відповідно. Які суми кредитів повинен запропонувати банк кожному клієнту, щоб прибуток був найбільшим за умови, що кожний кредитор розрахується в кінці вказаних термінів, а кредитний ресурс банку становить $G$ гривень з річним відсотком $p\%$ на даний момент.

1.5. В $n$ пунктах $A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ виробляється деякий однорідний товар та в $m$ пунктів $B_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ він доставляється у заданих кількостях $b_j$. Відпускна ціна виробленої одиниці готового товару в $i$-му пункті $g_i$ та вартості її доставки в $j$-й пункт постачання $c_{ij}$. У яких кількостях $x_{ij}$ потрібно брати товар у виробників, щоб сукупні витрати на купівлю і доставку були найменшими і повністю задовольняли потреби споживачів.

1.6. Нехай маємо $n$ працівників, яких можна призначити на одну з $n$ видів різних робіт. При цьому відома продуктивність праці $c_{ij}$ $i$-го працівника на кожному $j$-му робочому місці $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Потрібно закріпити працівників так, щоб кожний виконував тільки один вид роботи і підсумкова ефективність була найвищою.

1.7. Нехай підприємству задано план $q_1, q_2, \ldots, q_n$ з випуску продукції $p_1, p_2, \ldots, p_n$ за деякий час $T$. Продукція обробляється $m$ взаємозамінним устаткуванням $b_1, b_2, \ldots, b_m$ з різними потужностями. Задаються такі величини: $a_{ij}$ – норми часу на обробку одиниці продукції $i$-го виду на $j$-му устаткуванні; $A_j$ – фонд часу $j$-го устаткування; $c_{ij}$ – собівартість обробки $i$-го виду продукції на $j$-му устаткуванні. Треба так спланувати випуск продукції $p_j$, щоб її вартість була найменшою і план з випуску продукції було виконано.

1.8. На підприємство надходять матеріали у вигляді певних одиниць стандартних розмірів. Для виробничого використання його доводиться розрізати на частини, щоб одержати $m$ різні заготовки необхідної величини і форми. Нехай: $B_j$ – план випуску заготовок $i$-го виду $(i = 1,2,\ldots,m)$; $n$ – кількість різних способів розкрою стандартного матеріалу; $b_{ij}$ – число заготовок (кількість одиниць) $i$-го виду, одержаних за допомогою $j$-го способу розкрою; $c_j$ – величина відходів при $j$-му способі розкрою. Необхідно мінімізувати відходи матеріалу при виконанні плану випуску.

# РОЗДІЛ 2
# ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

## 2.1. ВЕКТОРИ

***Поняття і основні властивості вектора.***

Будь-яка упорядкована множина з $n$ дійсних чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ називається $n$-вимірним вектором (або просто вектором) $\vec{P}$; при цьому числа, які складають вказану множину $p_i$, називаються *координатами* (*компонентами*) вектора $\vec{P}$.

Сукупність усіх $n$-вимірних векторів називається $n$-*вимірним векторним простором* $R^n$.

Координати $n$-вимірного вектора $\vec{P}$ можна розмістити або в рядок:

$$\vec{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

або в стовпець:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Відповідні записи називаються вектором-рядком і вектором-стовпцем.

Два вектори з однаковою кількістю координат

$$\vec{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n), \ \vec{S} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

називаються рівними, якщо їх відповідні координати рівні, тобто $p_i = s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Вектор, всі координати якого рівні нулю, називається нульовим вектором $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

***Операції над векторами.***

Нехай вектори $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ належать $n$-вимірному простору $R^n$:

$$\vec{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n),\ \vec{Q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Вектор $\vec{R} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ називається *сумою векторів* $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ ($\vec{R} = \vec{P} \pm \vec{Q}$), якщо координати його рівні сумам відповідних координат цих векторів: $r_i = p_i \pm q_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Нехай $\lambda$ – якесь дійсне число. *Добутком вектора* $\vec{P}$ *на скаляр (число)* $\lambda$ називається вектор $\vec{Q}$, координати якого отримуються множенням відповідних координат вектора $\vec{P}$ на це число:

$$\vec{Q} = \lambda\vec{P} = (\lambda p_1, \lambda p_2, \ldots, \lambda p_n).$$

У загальному випадку для будь-яких векторів $\vec{P}$, $\vec{S}$ та $\vec{Q}$ що мають однакову розмірність, і довільних скалярних величин $\lambda$ та $\mu$ виконуються наступні співвідношення:

$\vec{P} \pm \vec{S} = \vec{S} \pm \vec{P}$ (властивість комутативності),

$\left(\vec{P} + \vec{S}\right) + \vec{Q} = \vec{P} + \left(\vec{S} + \vec{Q}\right)$ (властивість асоціативності),

$\vec{P} + \left(-\vec{P}\right) = \vec{0}$ (існування нульового вектора),

$\lambda\left(\vec{P} + \vec{S}\right) = \lambda\vec{P} + \lambda\vec{S}$ (властивість дистрибутивності),

$\lambda\left(\mu\vec{P}\right) = (\lambda\mu)\vec{P}$ (властивість асоціативності).

Скалярним добутком векторів називається число, яке складається з суми добутків відповідних координат цих векторів:

$$\vec{P}\vec{S} = p_1 s_1 + p_2 s_2 + \ldots + p_n s_n = \sum_{i=1}^{n} p_i s_i .$$

З даного визначення випливають основні властивості скалярного добутку векторів:

$\vec{P}\vec{S} = \vec{S}\vec{P}$,

$\left(\lambda\vec{P}\right)\vec{S} = \vec{P}\left(\lambda\vec{S}\right) = \lambda\left(\vec{P}\vec{S}\right)$,

$\vec{P}\left(\vec{S} + \vec{Q}\right) = \vec{P}\vec{S} + \vec{P}\vec{Q}$.

Вектори $\vec{P}$ і $\vec{S}$ називаються *ортогональними*, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\vec{P}\vec{S} = 0 .$$

***Лінійна залежність (незалежність) векторів. Базис векторного простору***.

Лінійною комбінацією векторів називається вектор виду

$$\vec{Q} = \lambda_1 \vec{P}_1 + \lambda_2 \vec{P}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{P}_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{P}_j .$$

Система векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_k$ називається *лінійно залежною*, якщо існують такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не рівні нулю одночасно, що лінійна комбінація цих векторів з вказаними числами дорівнює нульовому вектору:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{P}_j = \vec{0} .$$

Якщо ж ця рівність виконується тоді і тільки тоді, коли всі $\lambda_j$ дорівнюють нулю, то система векторів називається *лінійно незалежною*.

Система, що містить більше одного вектора, лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли серед її векторів міститься принаймні один вектор, який лінійно виражається через інші.

Максимальна кількість лінійно незалежних векторів простору називається *вимірністю простору*.

Система векторів називається *базисом векторного простору*, якщо вона лінійно незалежна і будь-який вектор цього простору лінійно виражається через вектори системи.

Базис простору складається з максимальної кількості лінійно незалежних векторів.

## 2.2. МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ

***Визначення та типи матриць***.

Матрицею називається прямокутний масив елементів, структурований рядками і стовпцями. У матриці $A$ елемент $a_{ij}$ розміщений на перетині $i$-го рядка та $j$-го стовпця масиву. Кажуть, що матриця має порядок (розмірність) $m \times n$, якщо вона складається з $m$ рядків і $n$ стовпців. Наприклад, матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|_{4\times 3}$$

має розмірність $4 \times 3$.

Типи матриць:

1. Квадратна матриця – це матриця, яка має однакову кількість рядків і стовпців (тобто $m = n$).
2. Одинична матриця – квадратна матриця, в якій всі діагональні елементи рівні одиниці, а всі недіагональні – нулю. Наприклад, одинична матриця порядку $3 \times 3$ має вигляд
$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Вектор-рядок – матриця, яка має один рядок і $n$ стовпців.
4. Вектор-стовпець – матриця, яка має $m$ рядків і один стовпець.
5. Матиця $A^T$ називається транспонованою до матриці $A$, якщо елемент $a_{ij}$ матриці $A^T$ дорівнює елементу $a_{ji}$ матриці $A$. Наприклад, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
то
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$
6. Матриця $O$ називається нульовою, якщо всі її елементи рівні нулю.
7. Дві матриці $A = \left\| a_{ij} \right\|$ і $B = \left\| b_{ij} \right\|$ рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову розмірність та $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх $i$ та $j$.

8. *Симетричними* називаються квадратні матриці, у яких елементи, симетричні відносно головної діагоналі, рівні, тобто $a_{ij} = a_{ji}$. Транспонування таких матриць не змінює їх вид.

***Арифметичні операції над матрицями***.

Для матриць визначені тільки операції додавання (віднімання) і множення. Операція ділення матриць не визначена, але в деяких випадках її можна замінити операцією обернення матриць.

*Додавання* (*віднімання*) двох матриць $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ можливе лише тоді, коли вони мають однакову розмірність. матриця суми отримується шляхом додавання елементів матриць $A$ і $B$, тобто

$$D = A + B = \|d_{ij}\|_{m\times n} = \|a_{ij} + b_{ij}\|_{m\times n}.$$

Для довільних матриць $A$, $B$ і $C$, які мають однакову розмірність, справедливі наступні співвідношення:

$A \pm B = B \pm A$ (властивість комутативності),

$A \pm (B \pm C) = (A \pm B) \pm C$ (властивість асоціативності),

$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$.

*Добуток* $AB$ матриць $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ визначений тоді і тільки тоді, коли кількість стовпців матриці $A$ дорівнює кількості рядків матриці $B$. Таким чином, якщо матриця $A$ має розмірність $m \times r$, матриця $B$ повинна мати розмірність $r \times n$, де $m$ і $n$ довільні цілі числа.

Нехай $D = AB$. Тоді матриця $D$ має розмірність $m \times n$, та її елементи $d_{ij}$ для всіх $i$ та $j$ визначаються формулою

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}.$$

Наприклад, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix},$$

тоді

$$D=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&7&9\\6&8&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times5+3\times6&1\times7+3\times8&1\times9+3\times0\\2\times5+4\times6&2\times7+4\times8&2\times9+4\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&31&9\\34&46&18\end{pmatrix}.$$

Добуток матриць має наступні властивості:

$E_m A = AE_n = A$, де $E$ – одинична матриця,

$(AB)C = A(BC)$,

$C(A+B) = CA + CB$,

$(A+B)C = AC + BC$,

$\alpha(AB) = (\alpha A)C = A(\alpha B)$, $\alpha$ – скаляр.

***Визначник квадратної матриці***.

Кожній скінченій матриці порядку $n\times n$ відповідає *визначник* $n$-го порядку, яким називається сума всіх добутків елементів матриці

$$\varepsilon(r_1, r_2, \ldots, r_n)a_{1r_1}a_{2r_2}\ldots a_{nr_n},$$

де $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ є деяка перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$; при цьому $\varepsilon(r_1, r_2, \ldots, r_n) = +1$, якщо перестановка $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ парна і $\varepsilon(r_1, r_2, \ldots, r_n) = -1$, якщо ця перестановка непарна. Визначник матриці позначається як $\det A$ або $|A|$.

Наприклад, нехай дана матриця

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},$$

тоді її визначник другого порядку обчислюється за формулою

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Визначник третього порядку обчислюється за формулою

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Визначники мають наступні властивості.

1. Якщо всі елементи якого-небудь рядка матриці рівні нулю, то визначник цієї матриці дорівнює нулю.
2. Визначник транспонованої матриці дорівнює визначнику вихідної матриці, тобто $\left|A^T\right| = |A|$.
3. Якщо матриця $B$ одержана з матриці $A$ шляхом перестановки двох яких-небудь рядків (або стовпців), тоді $|B| = -|A|$.
4. Якщо два рядка (або два стовпця) в матриці однакові, то її визначник дорівнює нулю.
5. Значення визначника не зміниться, якщо який-небудь рядок (стовпець) матриці помножити на скаляр і потім додати його до іншого рядка (стовпця).
6. Якщо кожен елемент якого-небудь рядка (стовпця) матриці помножити на скаляр $\alpha$, то значення визначника також буде помножено на це число $\alpha$.

***Мінори і алгебраїчні доповнення***.

Визначники квадратних матриць $k$-го порядку, які одержуються з матриці $A$ з $m$ рядками і $n$ стовпцями викреслюванням з неї $m-k$ рядків та $n-k$ стовпців, називаються *мінорами* матриці $A$. Якщо, зокрема, з квадратної матриці викреслити $i$-й рядок та $j$-й стовпець, то отримуємо *мінор* $M_{ij}$ *елемента* $a_{ij}$ матриці.

*Алгебраїчним доповненням елемента* $a_{ij}$ матриці називається число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

***Формула Лапласа***.

Визначник квадратної матриці $A$ $n$-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad \left(\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right).$$

***Ранг матриці***.

Найбільший порядок $r$ мінорів матриці, відмінних від нуля, називається *рангом матриці*. Ранг матриці позначають символом $\mathrm{rang}A = r$.

Відмінний від нуля мінор матриці, порядок якого дорівнює рангу матриці, називається *базисним мінором*. Рядки і стовпці матриці, які беруть участь в утворенні базисного мінору, також називаються *базисними*.

В загальному випадку у матриці може бути декілька базисних мінорів.

Квадратна матриця $A$ $n$-го порядку називається

*виродженою* (особливою, сингулярною), якщо $\det A = 0$, тобто якщо ранг $r < n$,

*невиродженою* (неособливою, несингулярною), якщо $\det A \neq 0$, тобто якщо ранг $r = n$.

***Приєднана матриця***.

Транспоновану матрицю, складену з алгебраїчних доповнень до її елементів, називають *приєднаною*, тобто приєднана матриця визначається співвідношенням

$$\mathrm{adj}A = \left\| A_{ij} \right\|^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

***Обернена матриця та методи її відшукання***.

Якщо $B$ і $C$ – дві квадратні матриці порядку $n$, причому такі, що $BC = CB = E$, тоді матриця $B$ називається *оберненою* до матриці $C$, при цьому матриця $C$ також буде оберненою до матриці $B$. Обернені матриці позначаються як $B^{-1}$ і $C^{-1}$.

*Якщо $BC = E$ і $B$ – невироджена матриця, тоді $C = B^{-1}$, причому матриця $C$ визначається єдиним чином.*

Для невироджених матриць справедливі наступні результати.

1. Якщо $A$ і $B$ невироджені квадратні матриці однакової розмірності, тоді $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Якщо $A$ – невироджена матриця, тоді з рівності $AB = AC$ випливає, що $B = C$.

Обернені матриці знаходять застосування при розв'язуванні систем лінійних рівнянь. Розглянемо систему з $n$ лінійних *незалежних* рівнянь

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

де $x_i$ – невідомі, $a_{ij}$ і $b_i$ – задані константи. Ця система у матричній формі запишеться

$$A\vec{X} = \vec{b}.$$

Оскільки рівняння системи лінійно незалежні, матриця $A$ буде невиродженою і, отже, буде існувати обернена до неї матриця. Таким чином, маємо

$$A^{-1}A\vec{X} = A^{-1}\vec{b},$$

звідки отримуємо розв'язок системи:

$$\vec{X} = A^{-1}\vec{b}.$$

*Метод приєднаної матриці*. Для невиродженої матриці $A$ порядку $n$ справедлива формула

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}A = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

маємо $\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ і $|A| = -7$. Тому

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

*Метод послідовних виключень (метод Жордана-Гауса).* Розглянемо блочну матрицю $(A\,|\,E)$, де $A$ – невироджена матриця. Помноживши зліва цю матрицю на $A^{-1}$, одержимо

$$\left(A^{-1}A\,|\,A^{-1}E\right) = \left(E\,|\,A^{-1}\right).$$

Таким чином, при послідовному перетворенні рядків вихідної матриці, яке забезпечує перетворення матриці $A$ в $E$, одночасно матриця $E$ перетворюється на $A^{-1}$.

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

Вектор розв'язків $\vec{X}$ і матрицю, обернену до матриці даної системи, можна отримати із співвідношення

$$A^{-1}\left(A\,|\,E\,|\,\vec{b}\right) = \left(E\,|\,A^{-1}\,|\,A^{-1}\vec{b}\right).$$

Реалізація методу послідовних виключень приводить до наступної послідовності дій. Вихідна матриця має вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

*Ітерація 1*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right).$$

*Ітерація 2*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & -5 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

*Ітерація 3*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6/7 & -1/7 & 5/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & 5/7 & -4/7 & 6/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 & -3/7 & 1/7 & 2/7 \end{array}\right).$$

Таким чином, отримали розв'язок системи $x_1 = 3/7$, $x_2 = 6/7$ і $x_3 = 2/7$. Обернена матриця $A^{-1}$ наведена справа від одиничної матриці і співпадає з оберненою матрицею, яка отримана методом приєднаної матриці.

***Квадратичні форми***.

Нехай $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ і $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Тоді функція

$$Q(\vec{X}) = \vec{X}^T A \vec{X} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

називається *квадратичною формою*. Завжди можна вважати, що матриця $A$ симетрична. Насправді, значення квадратичної форми не зміниться, якщо кожен коефіцієнт з пари $a_{ij}$ і $a_{ji}$ $(i \neq j)$ замінити на $(a_{ij} + a_{ji})/2$. У подальшому властивість симетричності матриці $A$ буде передбачатись.

Для прикладу наведемо квадратичну форму

$$Q(\vec{X}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

яка співпадає з формою

$$Q(\vec{X}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Відмітимо, що у другій квадратичній формі матриця симетрична.

Квадратична форма буде *додатно-означеною*, якщо $\vec{X}^T A\vec{X} > 0$ для всіх $\vec{X} \neq \vec{0}$, та *від'ємно-означеною*, якщо $\vec{X}^T A\vec{X} < 0$ при $\vec{X} \neq \vec{0}$. Якщо в цих випадках виконуються нестрогі нерівності, тобто $\vec{X}^T A\vec{X} \geq 0$ та $\vec{X}^T A\vec{X} \leq 0$ при $\vec{X} \neq \vec{0}$, то відповідні квадратичні форми будуть додатно- та від'ємно-напівозначеними (або невід'ємною та недодатною відповідно). Якщо ж при деяких $\vec{X}$ значення квадратичної форми будуть додатними, а при інших від'ємними, то така квадратична форма буде *неозначеною*.

Довільну квадратичну форму можна звести до канонічного виду, а саме:

$$\vec{\xi}^T \Lambda \vec{\xi} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j^2,$$

де матриця $\Lambda$ – діагональна, а змінні $\xi_j$ лінійно залежать від змінних $x_j$, тобто $\vec{\xi} = P\vec{X}$, де $P$ – матриця лінійного перетворення координат.

Очевидно, що для додатно-означеної квадратичної форми всі $\lambda_j > 0$, а для від'ємно-означеної всі $\lambda_j < 0$. Операція зведення квадратичної форми до канонічного виду не змінює знакоозначеності цієї форми. Ефективним методом зведення квадратичних форм до канонічного виду є відомий метод виділення повних квадратів.

Існують, однак, і інші способи встановлення знакоозначеності чи неозначеності квадратичних форм. Одним з них є *критерій Сильвест-*

*ра*, згідно з яким для додатної означеності квадратичної форми необхідно і достатньо, щоб всі кутові мінори її матриці були додатними, а саме

$$A_1 = a_{11} > 0,\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для від'ємної означеності квадратичних форм необхідно і достатньо чергування знаків кутових мінорів, причому потрібно $A_1 < 0$.

Для невід'ємності (додатної напівозначеності) квадратичної форми потрібно, щоб ранг її матриці $r$ був меншим $n$, всі перші $r$ кутові були додатними, а решта рівна нулю, в той час як для недодатності (від'ємної напівозначеності) при тих же умовах знаки $r$ перших кутових мінорів повинні чергуватись при $A_1 < 0$. При цьому для встановлення таким способом напівозначеності квадратичних форм, можливо, будуть потрібні означені перестановки даних рядків та стовпців матриці з однаковими номерами.

***Опуклі і угнуті функції***.

Функція $f(\vec{X})$ називається *строго опуклою*, якщо для різних точок $\vec{X}_1$ $\vec{X}_2$ виконується нерівність

$$f\left(\lambda\vec{X}_1 + (1-\lambda)\vec{X}_2\right) < \lambda f\left(\vec{X}_1\right) + (1-\lambda) f\left(\vec{X}_2\right),$$

де $0 < \lambda < 1$. Функція $f(\vec{X})$ називається *строго угнутою*, якщо функція $-f(\vec{X})$ – строго опукла.

Спеціальним випадком опуклої (угнутої) функції є квадратична форма

$$f\left(\vec{X}\right) = \vec{C}\vec{X} + \vec{X}^T A\vec{X},$$

де $\vec{C}$ – вектор констант, а $A$ – симетрична матриця. Можна показати, що квадратична форма $f(\vec{X})$ буде *строго опуклою*, якщо матриця $A$ додатно-визначена, і *строго угнутою*, коли $A$ – від'ємно-означена матриця.

## 2.3. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ЗАКОНИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Поняття імовірності асоціюється з проведенням експерименту, результати якого, що називають *випадками*, змінюються випадково. Множина усіх можливих випадків експерименту називається *простором подій*, а будь-яка підмножина цього простору – *подією*. Наприклад, в експерименті з киданням гральної кістки випадок відповідає грані кістки, тобто може приймати значення від 1 до 6. Отже, простір подій являє собою множину $\{1,2,3,4,5,6\}$. Прикладом події в цьому експерименті може бути випадіння парного числа (2, 4 або 6).

Експеримент може бути пов'язаний також з неперервним простором подій. Наприклад, час між відмовами деякого електронного пристрою може приймати будь-яке невід'ємне значення.

Подія $B$ називається *окремим випадком* події $A$, якщо кожного разу, коли відбувається подія $B$, також відбувається і подія $A$. Позначається така залежність між подіями так: $B \subset A$.

Події $A$ і $B$ називаються *рівносильними* (*еквівалентними*), якщо подія $B$ є окремим випадком події $A$ $(B \subset A)$, а подія $A$ є окремим випадком події $B$ $(A \subset B)$. Рівносильність подій позначають так: $A = B$.

*Основні операції над подіями*:

1. *Сумою* двох подій $A$ і $B$ називається подія, рівносильна настанню, принаймні, однієї з подій $A$, $B$. Отже, сума подій є об'єднанням подій: $A + B = A \cup B$.
2. *Добутком* двох подій $A$ і $B$ називається подія, рівносильна настанню і події $A$, і події $B$. Добуток подій є перетином (перерізом) подій: $AB = A \cap B$.

Подія, рівносильна непояві події $A$, називається *протилежною* події $A$ і позначають $\overline{A}$.

Подія, яка неминуче відбудеться, називається *вірогідною*. Будемо позначати вірогідну подію $J$.

Подія називається *неможливою*, коли протилежна їй подія вірогідна. Неможливу подію позначимо $O$. Отже $O = \overline{J}$.

Подія $A$, що не є вірогідною і не є неможливою, називається *випадковою*.

Дві події $A$ і $B$ називаються *несумісними*, коли їх добуток – неможлива подія, тобто коли $AB = O$. Несумісність подій $A$ і $B$, очевидно, означає, що поява події $A$ виключає можливість появи події $B$ в одному і тому ж випробуванні та навпаки.

Будемо говорити, що подія $A$ поділяється на *окремі випадки* $A_1$, $A_2$, . . . , $A_m$, коли події $A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ попарно несумісні і їх сума рівносильна події $A$, тобто

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_m,$$

$$A_i A_j = O \ (i \neq j).$$

Будемо говорити, що події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють *повну групу подій*, коли ці події попарно несумісні і їх сума – вірогідна подія. Інакше кажучи, повна група подій – це сукупність усіх окремих випадків, на які поділяється вірогідна подія.

Нехай ми маємо повну групу *рівноможливих* подій (рівноможливість подій означає, що ми не можемо надати переваги появи жодної з них):

$$A_1, A_2, \ldots, A_n.$$

Припустимо, що деяка подія $A$ поділяється на окремі випадки

$$A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{im},$$

що входять до даної повної групи подій. Таку подію $A$ називають *допустимою* відносно цієї повної групи рівноможливих подій.

*Відношення $P(A) = \dfrac{m}{n}$, де $n$ – кількість усіх випадків у повній групі рівноможливих подій, а $m$ – кількість випадків, на які поділяється подія $A$, називається ймовірністю події $A$.*

Класичне означення імовірності події $A$ можна сформулювати ще так:

*Імовірність події $A$ – це відношення кількості випадків, що сприяють події $A$, до кількості всіх можливих випадків.*

За означенням

$$0 \le P(A) \le 1,$$

де імовірність неможливої події дорівнює нулю $P(O) = 0$, а вірогідної події – одиниці $P(J) = 1$.

*Закон додавання імовірностей*:

$$P(A+B) = \begin{cases} P(A) + P(B), & \text{якщо } A \text{ і } B \text{ несумісні}, \\ P(A) + P(B) - P(AB), & \text{в протилежному випадку}. \end{cases}$$

*Умовною імовірністю події $B$ при умові, що відбулась подія $A$, називається відношення кількості окремих випадків, на які поділяється подія $AB$, до кількості окремих випадків, на які поділяється подія $A$.*

Позначають умовну ймовірність події $B$ при умові, що відбулась подія $A$, так: $P(B \mid A)$. Отже,

$$P(B \mid A) = \frac{k}{m},$$

де $m$ – кількість випадків, що сприяють події $A$, а $k$ – кількість випадків, що сприяють події $AB$.

Умовна ймовірність може бути виражена через безумовні так:

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Для двох подій $A$ і $B$ справедлива формула

$$P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B).$$

Дві події $A$ і $B$ називаються *незалежними*, коли припущення, що відбулась одна з них, не змінює ймовірності другої. Незалежність подій – це виконання таких рівностей:

$$P(B \mid A) = P(B) \text{ або } P(A \mid B) = P(A).$$

Кілька подій називаються *незалежними у сукупності*, коли вони попарно незалежні і будь-який добуток цих подій (що містить не всі їх) з кожною подією, що не ввійшла до цього добутку, незалежні.

*Закон добутку ймовірностей*:

$$P(AB)=\begin{cases} P(A)P(B) & \text{якщо } A \text{ і } B \text{ незалежні,} \\ P(A)P(B \mid A) & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

## 2.4. Випадкові величини і розподіл ймовірностей

*Випадковою величиною* називається величина, яка в результаті випробування може набувати одного з різних можливих значень залежно від обставин, які не можна наперед урахувати, тобто подія, яка полягає в тому, що величина набуває того чи іншого значення, випадкова. Розрізняють дискретні і неперервні випадкові величини.

Випадкова величина називається *дискретною*, якщо множина значень, яких набуває випадкова величина, –скінченна множина або послідовність.

*Неперервною* називається випадкова величина, яка може приймати всі значення з деякого проміжку.

Як неперервна, так і дискретна випадкова величина $X$ має *густину розподілу ймовірностей*, яка часто називається просто *густиною ймовірностей* і позначається як $f(x)$ (для неперервної випадкової величини) або $p(x)$ (для дискретної випадкової величини). Густина імовірності ставить у відповідність випадковій величині імовірнісну міру. Густини імовірностей повинні задовольняти умовам, які перераховані в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

| Характеристики густини | Випадкова величина $X$ | |
|---|---|---|
| | Дискретна | Неперервна |
| Область визначення | $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ | $a \le X \le b$ |
| Умова невід'ємності | $p_i(x_i) \ge 0$ | $f(x) \ge 0$ |
| Умова нормування | $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i) = 1$ | $\int\limits_a^b f(x)dx = 1$ |

Умова невід'ємності для неперервних і дискретних випадкових величин означає, що густина імовірності не може приймати від'ємних значень (у протилежному випадку імовірність деяких подій може бути від'ємною). Умова нормування вказує, що сума імовірностей по всьому простору подій повинна бути рівною одиниці.

Самою важливою імовірнісною характеристикою випадкової величини є *функція розподілу*, яка виражає для кожного $x$ імовірність того, що випадкова величина приймає яке-небудь значення, менше $x$ і визначається наступним чином:

$$P(X \le x) = \begin{cases} P(x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i) \ \text{äëÿ äèñêðåòíî¿ âèïàäêîâî¿ âåëè÷èíè} \ X, \\ F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx \ \text{äëÿ íåïåðåðâíî ¿ âèïàäêîâî¿ âåëè÷èíè} \ X. \end{cases}$$

## 2.5. Математичні сподівання і моменти випадкової величини

Нехай $X$ випадкова величина, $g(x)$ – деяка функція від $x$, тобто областю визначення функції $g(x)$ є множина всіх значень, яких може набувати випадкова величина $X$. *Математичним сподіванням* значень функції $g(x)$, яке позначається як $M(g(x))$, називається середня величина зважена по відношенню до густини імовірності випадкової величини $X$. При заданій густині імовірності ( $p(x)$ або $f(x)$ для дискретної і неперервної випадкових величин відповідно) величина $M(g(x))$ обчислюється наступним чином:

$$M(g(x))=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,p_i(x_i), & \text{якщо } X \text{ – дискретна випадкова величина,}\\ \int_a^b g(x)\,f(x)dx, & \text{якщо } X \text{ – неперервна випадкова величина.}\end{cases}$$

Для загальної характеристики властивостей одномірної випадкової величини $X$ звичайно використовуються дві числові характеристики:

*математичне сподівання* (*середнє*) $M(X)$ і

*дисперсія* $D(X)$.

Математичне сподівання є характеристикою положення розподілу випадкової величини $X$ на числовій осі відносно початку координат, а дисперсія – мірою її розкиду відносно математичного сподівання $M(X)$. Дисперсія випадкової величини – математичне сподівання квадрата відхилення цієї випадкової величини, тобто $D(X)=M(X-M(X))^2$. Більше значення дисперсії свідчить про більш високу степінь невизначеності в описі випадкової величини.

Формули для математичного сподівання і дисперсії випадкової величини $X$ можуть бути отримані із загальної формули для математичного сподівання шляхом підстановки $g(x)=x$ для $M(X)$ і $g(x)=(x-M(X))^2$ для $D(X)$. Отже,

$$M(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i\,p_i(x_i), & \text{якщо } X \text{ – дискретна випадкова величина,}\\ \int_a^b xf(x)dx, & \text{якщо } X \text{ – неперервна випадкова величина,}\end{cases}$$

$$D(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} (x_i-M(X))^2\,p_i(x_i), & \text{якщо } X \text{ – дискретна випадкова величина,}\\ \int_a^b (x-M(X))^2\,f(x)dx, & \text{якщо } X \text{ – неперервна випадкова величина.}\end{cases}$$

Обґрунтованість виводу вказаних формул легше проглядається для дискретного розподілу. У цьому випадку $M(X)$ являє собою зважену суму дискретних значень випадкової величини $X$, $D(X)$ – зважена сума квадратів відхилень випадкової величини $X$ від її математичного сподівання $M(X)$. Випадок з неперервно розподіленою випадковою величиною можна інтерпретувати аналогічно, якщо замінити інтегрування підсумовуванням.

Для обчислення дисперсії часто зручніше користуватись співвідношенням

$$D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2,$$

згідно з яким дисперсія випадкової величини $X$ дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата і квадратом математичного сподівання цієї випадкової величини.

Розглянемо дві неперервно розподілені випадкові величини $X$ і $Y$, які визначені відповідно на інтервалах $a \le X \le b$ і $c \le Y \le d$. Позначимо через $f(x, y)$ – *густину сумісного розподілу ймовірностей* величин $X$ і $Y$, а через $f_1(x)$ і $f_2(y)$ – *маржинальні* (частинні) *густини розподілу ймовірностей* величин $X$ і $Y$ відповідно. Тоді

$$f(x, y) \ge 0, \; a \le x \le y, \; c \le y \le d,$$

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = 1,$$

$$f_1(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

$$f_2(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y), \text{ якщо } X \text{ і } Y \text{ незалежні.}$$

Такі ж формули використовуються для дискретного розподілу випадкових величин, які одержуються заміною інтегрування підсумовуванням.

Якщо $X$ і $Y$ незалежні випадкові величини, то

$$M(XY)=M(X)M(Y).$$

Для суми будь-яких випадкових величин $X$ і $Y$ (залежних чи незалежних) можна довести, що

$$M(c_1X+c_2Y)=c_1M(X)+c_2M(Y).$$

Крім того, $D(c_1X+c_2Y)=c_1^2D(X)+c_2^2D(Y)+2c_1c_2\operatorname{cov}(X,Y)$,

де *коваріація* $\operatorname{cov}(X,Y)$ випадкових величин $X$ і $Y$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)&=M\{(X-M(X))(Y-M(Y))\}=\\&=M\{XY-XM(Y)-YM(X)+M(X)M(Y)\}=\\&=M(XY)-M(X)M(Y).\end{aligned}$$

Якщо $X$ і $Y$ – *незалежні* випадкові величини, то $M(XY)=M(X)M(Y)$ і $\operatorname{cov}(XY)=0$. Обернене твердження невірне у тому змісті, що дві залежні випадкові величини можуть мати коваріацію, рівну нулю.

Коваріацію називають ще *кореляційним моментом* випадкових величин і позначають $\mu_{XY}=\operatorname{cov}(X,Y)$.

## 2.6. Деякі розподіли ймовірностей

Розглянемо чотири розподіли випадкових величин, які часто використовуються в теорії і на практиці, – дискретні (біноміальний і Пуассона) та неперервні (експоненціальний і нормальний).

***Біноміальний розподіл***.

Коли виконуються послідовні випробування, то в результаті кожного з них може відбутися або не відбутися деяка подія $A$. Випробування виконується $n$ раз. Нехай ймовірність події $A$ у кожному випробуванні та сама $P(A)=p$. Яка ймовірність того, що у виконаних $n$ випробуваннях подія $A$ відбудеться $k$ раз?

Ця абстрактна задача має багато різних конкретних реалізацій. Наприклад, підприємець виготовляє деякі вироби партіями по $n$ одиниць у кожній. Імовірність того, що виготовлений виріб відповідає стандарту дорівнює $p$. Необхідно визначити ймовірність того, що в партії $k$ стандартних виробів.

Виконавши $n$ послідовних випробувань, ми матимемо різні комбінації результатів. Ті комбінації результатів, в яких подія відбудеться $k$ раз, називатимемо сприятливими.

Визначимо ймовірність однієї сприятливої комбінації. Сприятливою комбінацією є добуток $n$ незалежних у сукупності подій: $k$ появ події $A$ і $(n-k)$ появ події $\overline{A}$. Отже, за теоремою про ймовірність добутку подій, незалежних у сукупності, дістанемо, що ймовірність однієї сприятливої комбінації дорівнює

$$p^k(1-p)^{n-k}.$$

Кількість всіх можливих сприятливих комбінацій $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Отже, шукана ймовірність $k$ появ події $A$ в $n$ незалежних випробуваннях дорівнює

$$P_n(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Цю формули іноді називають *формулою Бернуллі*. Це формула густини ймовірності біноміального розподілу з параметрами $n$ і $p$.

Математичне сподівання і дисперсія для цього розподілу дорівнюють

$$M(X) = np,\ D(X) = np(1-p).$$

***Розподіл Пуассона***.

Люди приходять у банк або магазин „цілком випадково”. Це означає, що немає ніякої можливості передбачити, коли і хто прийде. Густина розподілу випадкової величини, яка дорівнює кількості таких відвідувань на протязі визначеного періоду часу, описується *розподілом Пуассона*.

Нехай $X$ – подія (наприклад, відвідування банку або магазину), яка відбувається на протязі одиниці часу (наприклад, хвилини, часу). Тоді імовірність того, що подія $X$ настане $k$ раз, задається формулою, яка являє собою закон розподілу Пуассона ймовірностей масових (великі значення $n$) і рідких (малоймовірних) подій:

$$P_n(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ де } \lambda=np,\ k=0,1,2,\ldots\ .$$

Математичне сподівання і дисперсія розподілу Пуассона рівні відповідно $M(X)=\lambda$ і $D(X)=\lambda$. З інтуїтивних міркувань формула $M(X)=\lambda$ повинна означати середню кількість подій, які відбуваються за одиницю часу. По суті, це так і є: параметр $\lambda$ визначає швидкість, з якою відбувається подія (кількість подій за одиницю часу).

Розподіл Пуассона широко використовується в теорії масового обслуговування.

***Експоненціальний розподіл***.

Якщо *кількість заявок*, які надійшли в установу за певний період часу, задовольняє розподілу Пуассона, то розподіл *інтервалів часу* між послідовними надходженнями заявок повинні відповідати *експоненціальному розподілу*. Зокрема, якщо $\lambda$ є швидкість появи події у розподілі Пуассона, то розподіл часу $x$ між послідовними надходженнями визначається густиною імовірності

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0\,.$$

Математичне сподівання і дисперсія експоненціального розподілу рівні

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Математичне сподівання $M(X)$ узгоджується з визначенням $\lambda$. Якщо $\lambda$ – швидкість, з якою відбувається подія, то $1/\lambda$ – середній інтервал між послідовними настаннями події.

***Нормальний розподіл (розподіл Гауса)***.

*Нормальний розподіл* описує багато випадкових явищ, які відбуваються у повсякденному житті, включаючи аналіз рахунків, розподіл ваги та росту людей і багато інших. Густина імовірності нормального розподілу задається формулою

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

де $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$. Нормальний розподіл з математичним сподіванням $a$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma$ позначається як $N(a,\sigma)$.

Графік густини $f(x)$ нормального розподілу є симетричною функцією відносно математичного сподівання $a$.

Функцію нормального розподілу важко представити у вигляді формули, яка придатна для практичних розрахунків. У зв'язку з цим складені спеціальні таблиці функції нормального розподілу. Ці таблиці створені для *стандартного* (*нормованого*) *нормального* розподілу з нульовим математичним сподіванням $a=0$ і дисперсією , рівною одиниці $\sigma^2=1$. Будь-яку розподілену випадкову величину $X$ з математичним сподіванням $a$ і дисперсією $\sigma^2$ можна звести до стандартного виду шляхом заміни

$$z=\frac{x-a}{\sigma}.$$

На рис. 2.1 показаний графік густини $f(x)$ стандартного нормального розподілу.

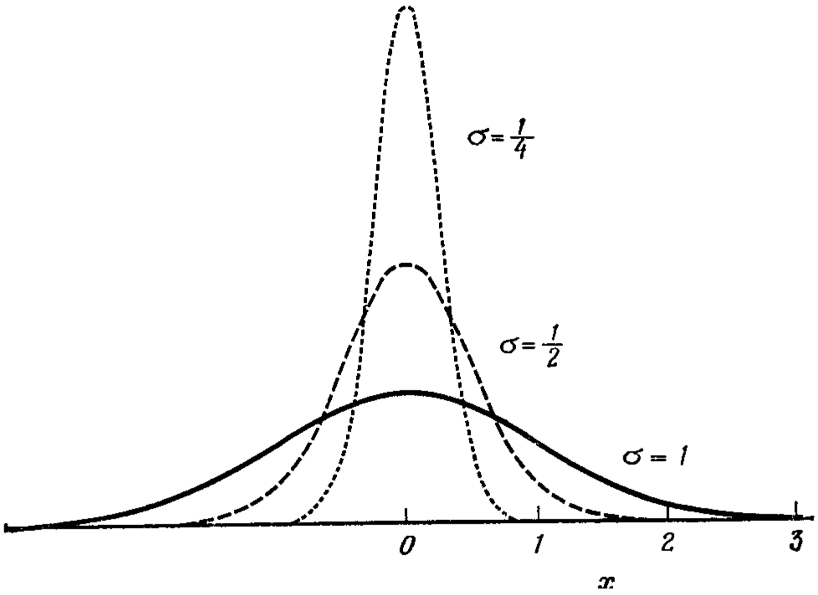



Рис. 2.1

Відмітимо, що біля $99{,}98\%$ площі під кривої густини нормального розподілу знаходиться в інтервалі $a-3\sigma \le x \le a+3\sigma$. Цей факт відомий під назвою „*правило трьох сигм*”.

## Питання для самоконтролю

1. Що називається $n$-вимірним вектором?
2. Які основні операції над векторами та їх властивості ви знаєте?
3. Які вектори називаються ортогональними?
4. Що називається лінійною залежністю (незалежністю) векторів?
5. Що називається вимірністю векторного простору, базисом векторного простору?
6. Дайте означення матриці. Які типи матриць ви знаєте?
7. Які визначені операції над матрицями? Яка матриця називається транспонованою?
8. Дайте означення визначника матриці. Що називається порядком визначника?
9. Сформулюйте основні властивості визначників.
10. Що називається мінором, алгебраїчним доповненням?
11. Запишіть формулу Лапласа?
12. Що називається рангом матриці, базисним мінором?
13. Яка матриця називається виродженою, невиродженою?
14. Яка матриця називається приєднаною?
15. Яка матриця називається оберненою? Які способи відшукання оберненої матриці ви знаєте?
16. Сформулюйте означення квадратичної форми. Як визначається знакоозначеність квадратичної форми?
17. Що називається подією? Які основні операції над подіями ви знаєте? Яка подія називається випадковою?
18. Дайте класичне означення ймовірності.
19. Які події називаються: незалежними, несумісними, рівноможливими?
20. Сформулюйте закон додавання імовірностей.

21. Що називається умовною імовірністю? Сформулюйте закон добутку імовірностей.
22. Яка величина називається випадковою? На які типи поділяють випадкові величини?
23. Що називається густиною розподілу ймовірностей, функцією розподілу випадкової величини?
24. Що називається математичним сподіванням випадкової величини? Як воно визначається для дискретної та неперервної випадкових величин?
25. Що називається дисперсією випадкової величини? Як вона визначається для дискретної та неперервної випадкових величин?
26. Що називається густиною сумісного розподілу імовірностей випадкових величин? Як визначаються коваріація двох випадкових величин? Що називається кореляційним моментом?
27. Які розподіли імовірностей ви знаєте, назвіть їх основні особливості?

## Вправи

1. Знайти лінійні комбінації векторів

$$\text{а) } 3\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}\,,\ \text{ б) } \left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{c} - 3\left(\vec{b},\vec{c}\right)\vec{a} + 3\left(\vec{b},\vec{c}\right)\vec{b}\,,$$

де $\vec{a} = (4,1,3,-2)$, $\vec{b} = (1,2,-2,3)$.

2. Покажіть, що наступні вектори є лінійно залежними:

а) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$.

3. Для даних матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 9 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

знайти

а) $A + 7B$; б) $2A - 3B$; в) $(A + 7B)^T$.

4. Для матриць з прикладу 3 покажіть, що $AB \neq BA$.

5. Для матриць з прикладу 3 знайдіть $A^{-1}$ і $B^{-1}$

   а) методом приєднаної матриці;

   б) методом послідовних виключень.

6. Покажіть, що наступна квадратична форма є від'ємно-визначеною

$$Q(x_1, x_2) = 6x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 - \frac{27}{4}.$$

7. Покажіть, що функція $f(x) = e^x$ строго опукла на всій дійсній вісі.

8. Покажіть, що наступна квадратична форма є строго опуклою

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

9. На полиці знаходиться 10 книг, розміщених у довільному порядку. З них три книги по теорії ймовірностей, три – математичного аналізу і чотири – по лінійній алгебрі. Студент навмання дістає одну

книгу. Яка ймовірність того, що він візьме книгу по теорії ймовірностей або лінійної алгебрі?

10. Контролер перевіряє вироби на відповідність стандарту. Відомо, що імовірність відповідності стандарту виробів дорівнює 0,9. Яка імовірність того, що з двох перевірених виробів обидва будуть стандартними, якщо події появи стандартних виробів незалежні? Яка імовірність того, що з двох перевірених виробів тільки одне стандартне?
11. В районі сто населених пунктів. У п'яти з них знаходяться пункти прокату сільгосптехніки. Випадково обирають два населених пункти. Яка імовірність того, в них будуть пункти прокату?
12. Серед 10 лотерейних білетів є 4 білети з виграшем. Купують 2 білети. Записати закон розподілу імовірностей кількості виграшних білетів серед куплених. Побудувати функцію розподілу.
13. Дана наступна функція

$$f(x)=\frac{k}{x^2},\ 10 \le x \le 20 .$$

а) Знайдіть значення константи $k$, при якому функція $f(x)$ буде густиною імовірностей.

б) Знайдіть функцію розподілу випадкової величини $X$ і визначіть імовірність того, що випадкова величина прийме значення більше 12, між 13 і 14.

14. Добова потреба у дизельному пальному є рівномірно розподіленою величиною, яка змінюється в інтервалі від 750 до 1250 літрів. Цистерна ємкістю 1100 літрів наповнюється щодобово опівночі. Яка імовірність того, що цистерна буде пустою якраз перед її заповненням?
15. Покажіть, що математичне сподівання і дисперсія випадкової величини $X$, що рівномірно розподілена на інтервалі $a \le x \le b$, рівні

$$M(X)=\frac{b+a}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

16. Густина сумісного розподілу імовірностей $p(x_1,x_2)$ випадкових величин $X_1$ і $X_2$ має наступний вигляд:

$p(x_1,x_2)=$

| | $x_2=3$ | $x_2=5$ | $x_2=7$ |
|---|---|---|---|
| $x_1=1$ | 0,2 | 0 | 0,2 |
| $x_1=2$ | 0 | 0,2 | 0 |
| $x_1=3$ | 0,2 | 0 | 0,2 |

а) знайдіть маргінальні густини імовірностей $p_1(x_1)$ і $p_2(x_2)$.

б) чи є випадкові величини $X_1$ і $X_2$ незалежними?

в) визначіть $M(X_1+X_2)$.

г) знайдіть $\operatorname{cov}(X_1,X_2)$.

д) обчисліть $D(5X_1-6X_2)$.

# РОЗДІЛ 3
# ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

## 3.1. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У більшості прикладних задач математичного програмування на невідомі змінні накладається умова їх невід'ємності, що зумовлено реальною природою розглядуваних явищ. Умову невід'ємності часто називають *природними обмеженнями* задачі. Ці обмеження мають основне значення в теорії задач лінійного програмування та побудові алгоритмів їх розв'язування, і тому їх завжди виділяють в окрему групу умов. Інколи, в реальних ситуаціях, на змінні або не можна накладати обмеження по знаку, або навіть слід прийняти умову недодатності деяких змінних.

В розглянутих у першому розділі задачах математичного програмування на знаходження максимуму або мінімуму цільової функції системи обмежень одних з них мали форму нерівностей, а інших форму рівнянь; в деяких з них обмеження задавались як нерівностями так і рівняннями.

Отже, щоб представити задачу лінійного програмування в найбільш загальній формі, з якої можна добути всі окремі випадки, слід відмовитись від умови невід'ємності всіх змінних задачі та розглянути всі типи обмежень (нерівності обох знаків і рівняння).

*Загальною формою задачі лінійного програмування є задача на знаходження екстремуму (мінімуму чи максимуму) лінійної цільової функції при лінійній системі обмежень, що включає як рівності, так і нерівності обох знаків, і при невідомих змінних, з яких одні зв'язані умовою невід'ємності, другі – умовою недодатності, а на знак третіх ніяких умов не накладено,* тобто задача має вигляд

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to opt : \max/\min, \quad (3.1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad (3.2)$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k,$$

$$a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n \le b_{k+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad (3.3)$$

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n \le b_s,$$

$$a_{s+1,1}x_1 + a_{s+1,2}x_2 + \ldots + a_{s+1,n}x_n \ge b_{s+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad (3.4)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m,$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = 1, 2, \ldots r\right), \quad (3.5)$$

$$x_j \le 0 \ \left(j = r+1, r+2, \ldots, l\right), \quad (3.6)$$

$$x_j \forall \ \left(j = l+1, l+2, \ldots, n\right)^{3}. \quad (3.7)$$

Назвемо групу обмежень (3.2) – (3.4) *основними обмеженнями*, а групу (3.5) – (3.6) – *обмеженнями на знаки змінних*. Отже, загальна форма задачі є формою із змішаною системою обмежень на знаки невідомих і змішаною системою основних умов.

[3] Символ ∀ означає, що *x* може приймати будь-яке значення, тобто на знак змінної обмеження не накладається і (3.7) не є обмеженнями задачі.

## 3.2. ДВІ СТАНДАРТНІ ФОРМИ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Загальна форма задачі лінійного програмування (3.1) – (3.6) не придатна для побудови досить простих і ефективних методів розв'язування її, причиною чого є неоднорідність системи умов (3.2) – (3.6). Тому, як правило, задачу зводять до *стандартної форми*.

В залежності від методів, які застосовуються, розрізняють дві стандартні форми:

*основна задача лінійного програмування з обмеженнями-рівностями або перша стандартна форма;*

*основна задача лінійного програмування з обмеженнями-нерівностями або друга стандартна форма.*

Формулювання основної задачі лінійного програмування у **першій стандартній формі** полягає в наступному: серед усіх невід'ємних розв'язків системи основних обмежень-рівнянь знайти такий, при якому цільова функція набуває найбільшого або найменшого значення:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to opt : \max/ \tag{3.8}$$

,

$$\begin{aligned} &a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ &a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = 1,2,\ldots,n). \tag{3.10}$$

Або у короткому запису

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to opt : \max/\min, \tag{3.8a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i = 1,2,\ldots,m). \tag{3.9a}$$

Основна задача лінійного програмування може бути також записана у скалярно-векторній, матричній і векторній формах, якщо скористатись позначеннями:

$$\vec{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \vec{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \vec{P}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix};$$

$$\vec{P}_2=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \quad \vec{P}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \vec{c}=(c_1,c_2,\dots,c_n); \quad \vec{a}_1=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n});$$

$$\vec{a}_2=(a_{21},a_{22},\dots,a_{2n}); \; \vec{a}_m=(a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mn}).$$

Тут $\vec{X}$ – вектор-стовпець змінних, $\vec{B}$ – вектор-стовпець вільних членів, $A$ – матриця системи основних обмежень, $\vec{P}_j$ $(j=1,2,\dots,n)$ – вектор-стовпець матриці $A$; $\vec{c}$ – вектор-рядок коефіцієнтів цільової функції, $\vec{a}_i$ $(i=1,2,\dots,m)$ – вектор-рядок матриці $A$.

**Скалярно-векторна форма**:

$$z=\vec{c}\vec{X}\to opt:\max/\min, \tag{3.8б}$$

$$\vec{a}_i\vec{X}=b_i \;\; (i=1,2,\dots,m), \tag{3.9б}$$

$$\vec{X}\ge\vec{0}. \tag{3.10б}$$

**Матрична форма**:

$$z=\vec{c}\vec{X}\to opt:\max/\min, \tag{3.8в}$$

$$A\vec{X}=\vec{B}, \tag{3.9в}$$

$$\vec{X}\ge\vec{0}. \tag{3.10в}$$

**Векторна форма**:

$$z=\vec{c}\vec{X}\to opt:\max/\min, \tag{3.8г}$$

$$\vec{P}_1x_1+\vec{P}_2x_2+\dots+\vec{P}_nx_n=\vec{B}, \tag{3.9г}$$

$$\vec{X}\ge\vec{0}. \tag{3.10г}$$

**Лема 3.1. Будь-яку задачу лінійного програмування у загальній формі можна звести до першої стандартної форми.**

*Доведення.* Покажемо, що будь-яку нерівність, введенням додаткової невідомої можна звести до рівності. Дійсно, нехай деяке обмеження має вигляд

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i .$$

Перепишемо його таким чином:

$$b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) \ge 0 .$$

Введемо позначення $y = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)$.

За побудовою $y \ge 0$ є невід'ємною величиною. Крім того останнє співвідношення є рівняння відносно невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + y = b_i, \ y \ge 0 .$$

Отже ми прийшли до рівності еквівалентній вихідної нерівності.

За таким самим алгоритмом можна звести до рівності й нерівність з протилежним знаком, але завжди треба нові невідомі додавати до менших частин нерівностей, бо у протилежному випадку вони не будуть невід'ємними величинами.

Наступний крок полягає в зведені до однорідної системи обмежень на знак. Умови недодатності (3.6) легко перетворюються в умови невід'ємності за допомогою заміни відповідних змінних $x'_j = -x_j \ (j = r+1, r+2, \ldots, l)$. Складніше позбутися змінних, на знак яких обмежень не накладено. Цього можна досягти двома способами.

*1-й спосіб.* Якщо число таких змінних (3.7) менше, ніж число обмежень основної групи і вектори-стовпці коефіцієнтів при них разом з деякими іншими утворюють базисний мінор, то, розв'язавши добуту нами систему обмежень-рівностей відносно згаданих змінних, виключаємо їх як з системи умов, так і з цільової функції, залишаючи без уваги формули, що виражають їх через невід'ємні змінні, підставляючи які у залишені вирази, дістаємо й оптимальні значення змінних (3.7).

Хоч цей спосіб придатний для більшості практичних випадків, однак буває, що умови необхідні для його використання, не виконуються. Тоді цим способом можна виключити лише частину вільних змінних, а до тих, що залишилися у задачі, застосувати 2-й спосіб.

*2-й спосіб.* Кожну змінну, на знак якої не накладено обмежень, подають у вигляді різниці двох невід'ємних змінних

$$x_j = x_j'' - x_j', \text{ де } x_j' \ge 0,\ \ x_j'' \ge 0. \tag{3.11}$$

Визначивши оптимальні значення $x_j'$ та $x_j''$, можемо знайти за (3.11) і оптимальне значення відповідних $x_j$.

---

**Приклад 3.1.** Звести до першої стандартної форми таку задачу лінійного програмування:

$$z = 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \to opt,$$

$$2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 12,$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 6,$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 \le 8,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \forall,\ x_4 \forall.$$

*Розв'язання.* Введенням однієї додаткової змінної $x_5$ та заміною $x_2' = -x_2$ зводимо задачу до вигляду

$$z = 6x_1 - 3x_2' - 4x_3 + 5x_4 \to opt,$$

$$2x_1 - 6x_2' - 2x_3 + x_4 = 12,$$

$$3x_1 + x_2' - 2x_3 + x_4 = 6,$$

$$x_1 - x_2' - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 8,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_3 \forall,\ x_4 \forall,\ x_5 \ge 0.$$

Хоч тут кількість змінних без обмеження на знак і менша від кількості основних обмежень, їх не можна вивести з задачі, оскільки вектори-стовпці їхніх коефіцієнтів пропорційні і не можуть разом входити до базисного мінору. Тому виведемо одну з них, а другу замінимо різницею двох невід'ємних змінних.

Запишемо задачу в таблицю (в нульовий рядок записане рівняння, що відповідає цільової функції: $z - 6x_1 + 3x_2' + 4x_3 - 5x_4 = 0$).

| № рядка | $x_1$ | $x_2'$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | –6 | 3 | 4 | –5 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | –6 | –2 | $\boxed{1}$ | 0 | 12 |
| 2 | 3 | 1 | –2 | 1 | 0 | 6 |
| 3 | 1 | –1 | –4 | 2 | 1 | 8 |

Вибравши $a_{14} = 1$ ключовим елементом, переходимо до нової таблиці.

| № рядка | $x_1$ | $x_2'$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | –27 | –6 | 0 | 0 | 60 |
| 1 | 2 | –6 | –2 | 1 | 0 | 12 |
| 2 | 1 | 7 | 0 | 0 | 0 | –6 |
| 3 | –3 | 11 | 0 | 0 | 1 | –16 |

Виписуючи окремо 1-й рядок (виразивши з нього $x_4$) $x_4 = 12 - 2x_1 + 6x_2' + 2x_3$ і замінивши $x_3 = x_3'' - x_3'$, дістаємо першу стандартну форму задачі

$$z' = -4x_1 + 27x_2' + 6x_3'' - 6x_3' \to opt\,,$$

$$x_1 + 7x_2' = -6\,,$$

$$-3x_1 + 11x_2' + x_5 = -16\,,$$

$$x_1 \geq 0,\; x_2' \geq 0,\; x_3' \geq 0,\; x_3'' \geq 0,\; x_5 \geq 0\,,$$

де $z' = z - 60$.

Основна задача лінійного програмування у **другій стандартній формі** полягає в тому, що серед всіх невід’ємних розв’язків системи основних обмежень-нерівностей треба знайти такий, при якому цільова функція буде мати оптимальне значення:

$$z = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_k x_k \to opt : \max/\min \qquad (3.12)$$

,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k \leq \beta_1, \qquad (3.13)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k \le \beta_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sk}x_k \le \beta_s,$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = 1,2,\ldots,k\right). \quad (3.14)$$

Або у короткому запису

$$z = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j x_j \to opt : \max/\min, \quad (3.12а)$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j \le \beta_i \ \left(i = 1,2,\ldots,s\right). \quad (3.13а)$$

**Скалярно-векторна форма**:

$$z = \vec{\gamma}\vec{X} \to opt : \max/\min, \quad (3.12б)$$

$$\vec{a}_i\vec{X} = \beta_i \ \left(i = 1,2,\ldots,m\right), \quad (3.13б)$$

$$\vec{X} \ge \vec{0}. \quad (3.14б)$$

**Матрична форма**:

$$z = \vec{\gamma}\vec{X} \to opt : \max/\min, \quad (3.12в)$$

$$A\vec{X} \le \vec{B}, \quad (3.13в)$$

$$\vec{X} \ge \vec{0}. \quad (3.14в)$$

**Векторна форма**:

$$z = \vec{\gamma}\vec{X} \to opt : \max/\min, \quad (3.12г)$$

$$\vec{P}_1x_1 + \vec{P}_2x_2 + \ldots + \vec{P}_nx_n \le \vec{B}, \quad (3.13г)$$

$$\vec{X} \ge \vec{0}. \quad (3.14г)$$

**Лема 3.2. Перша стандартна форма основної задачі лінійного програмування завжди може бути зведена до другої стандартної форми.**

*Доведення.* Припустимо, що невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_k$ є вільними; $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ – базисними; ранг матриці системи обмежень (3.9) дорівнює $s$ $\left(k + s = n\right)$.

Розв'яжемо систему рівнянь (3.9) відносно базисних невідомих і нехай розв'язок має вигляд

$$
\begin{aligned}
&x_{k+1} = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1k}x_k, \\
&x_{k+2} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2k}x_k, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&x_n = \beta_s + \alpha_{s1}x_1 + \alpha_{s2}x_2 + \ldots + \alpha_{sk}x_k.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Всі невідомі невід'ємні, тому

$$x_{k+1} \geq 0,\ x_{k+2} \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0.$$

Враховуючи це, поставимо у відповідність отриманому розв'язку (3.15) еквівалентну систему нерівностей:

$$
\begin{aligned}
&\beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1k}x_k \geq 0, \\
&\beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2k}x_k \geq 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\beta_s + \alpha_{s1}x_1 + \alpha_{s2}x_2 + \ldots + \alpha_{sk}x_k \geq 0.
\end{aligned}
$$

Введемо позначення $a'_{ij} = -\alpha_{ij}$ і помноживши всі нерівності на –1 отримуємо систему обмежень:

$$
\begin{aligned}
&a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1k}x_k \leq \beta_1, \\
&a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2k}x_k \leq \beta_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&a'_{s1}x_1 + a'_{s2}x_2 + \ldots + a_{sk}x_k \leq \beta_s, \\
&x_j \geq 0 \ \ (j = 1, 2, \ldots, k).
\end{aligned}
$$

Очевидно, що остання система обмежень збігається з (3.13) і рівносильна системі обмежень (3.9) у тому розумінні, що будь-якому розв'язку $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ системи нерівностей відповідає певний розв'язок $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ системи рівнянь (3.9).

Для завершення доведення леми підставимо у цільову функцію (3.8) замість базисних невідомих $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ їхні вирази (3.15). Якщо згрупувати подібні члени, то цільова функція набуде вигляду (3.12).

**Приклад 3.2.** Звести до другої стандартної форми задачу

$$z = 2 - x_1 + 3x_2 \to opt,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 10,$$

$$4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8,$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = 1,2,3,4).$$

*Розв'язання.* Виписуємо матрицю системи обмежень

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right),$$

і шукаємо ранг матриці. Базисним буде мінор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Отже, ранг $r = 2$. Базисні невідомі: $x_2, x_3$; вільні невідомі: $x_1, x_4$. Розв'язуємо систему відносно базисних невідомих:

$$x_2 = 9 - 3x_1 + x_4,$$

$$x_3 = 1 + x_1 + 2x_4.$$

Так як $x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$, то

$$9 - 3x_1 + x_4 \ge 0,$$

$$1 + x_1 + 2x_4 \ge 0,$$

$$x_1 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Запишемо цільову функцію $z$ через вільні невідомі

$$z = 2 - x_1 + 3(9 - 3x_1 + x_4) = 29 - 10x_1 + 3x_4.$$

Отже, задача, рівносильна вихідній, має вигляд:

$$z = 29 - 10x_1 + 3x_4 \to opt,$$

$$3x_1 - x_4 \le 9,$$

$$-x_1 - 2x_4 \le 1,$$

$$x_1 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Із лем 3.1, 3.2 випливає така теорема.

**Теорема 3.1. Основна задача лінійного програмування у першій стандартній формі і основна задача лінійного програмування у другій стандартній формі еквівалентні між собою.**

## 3.3. Канонічна форма основної задачі лінійного програмування

Розв'язуючи систему основних обмежень основної задачі лінійного програмування у першій стандартній формі відносно $m$ базисних невідомих та виключаючи їх одночасно з цільової функції, дістанемо **канонічну форму основної задачі лінійного програмування** з обмеженнями рівностями (надалі просто канонічна форма), а саме:

$$z' = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_k x_k \to opt,$$

$$\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1k} x_k + x_{k+1} = \beta_1,$$

$$\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2k} x_k + x_{k+2} = \beta_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \ldots + \alpha_{mk} x_k + x_n = \beta_m,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n),$$

де $z' = z - Q$, а $Q$ – значення цільової функції при даному базисному розв'язку $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0;\ x_{k+1} = \beta_1, x_{k+2} = \beta_2, \ldots, x_n = \beta_m$. Тут базисними є останні $m$ змінних $(k = n - m)$.

Канонічна форма основної задачі лінійного програмування задовольняє наступним трьом умовам:

1. Система основних обмежень-рівнянь зображена в такому вигляді, що кожна базисна невідома входить лише до одного рівняння системи з коефіцієнтом, що дорівнює одиниці. Якщо деякі рівняння системи поміняти місцями так, щоб нумерація базисних невідомих була строго зростаючою, то базисний мінор у цьому випадку утворює одиничну матрицю. Така система рівнянь називається системою з базисом.
2. Вільні члени системи обмежень невід'ємні.
3. Цільова функція залежить лише від вільних невідомих.

Щоб задача лінійного програмування була канонічною, достатньо так вибрати базисні невідомі, щоб виконувались умови 1,2. Таку систему інколи називають *канонічною системою обмежень*. Якщо до форми входять базисні невідомі, а система обмежень канонічна, то задачу лінійного програмування називають *майже канонічною*. Для того, щоб звести її до канонічної, треба підставити у цільову функцію замість базисних невідомих їх значення через вільні невідомі.

Слід зауважити, що канонічна форма задачі лінійного програмування дає змогу формалізувати відшукання оптимального розв'язку її за симплекс-таблицями.

## 3.4. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Геометрична інтерпретація аналітичних задач дає можливість наочно представити їх структуру, що сприяє засвоєнню їхніх основних властивостей та відкриває шляхи виявлення і дослідження інших, більш складних властивостей цих задач. У найпростіших випадках геометричне подання дає змогу знайти розв'язок задачі, однак навіть у тривимірному просторі геометричне розв'язування ускладнюється і створює ряд труднощів у побудові відповідних геометричних фігур, а в просторах вимірності, більшої за три, таке розв'язування і зовсім неможливе.

Можливі різноманітні форми і способи геометричного представлення задач лінійного програмування. Доцільність вибору кожного способу зумовлюється метою, якої хочуть досягти даною геометричною інтерпретацією та особливостями структури самої задачі, в тому числі й формою її представлення.

Для геометричної інтерпретації візьмемо основну задачу лінійного програмування у другій стандартній формі. Для наочності розглянемо найпростіший випадок, коли в системі обмежень (3.13) і цільовій функції (3.12) є лише дві змінних $x_1, x_2$.

Розглянемо розв'язування нерівностей.

**Лема 3.3. Множина розв'язків нерівності з двома змінними**

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$

**є однією з двох півплощин, на які вся площина ділиться прямою** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$**, включаючи й цю пряму, а інша півплощина з тією ж прямою є множиною розв'язків нерівності**

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i$ **.**

*Доведення*. Гранична пряма $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ перпендикулярна до *вектора нормалі* $\vec{N} = (a_{i1}, a_{i2})$ (рис 3.1). Вектор нормалі (його ще називають *напрямним вектором*) є градієнтом лінійної функції $f = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$ і показує напрям зростання її значень ($grad\ f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\vec{e}_2$, де $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – одиничні вектори вздовж осей $Ox_1$ і $Ox_2$ відповідно; таким чином, $grad\ f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (a_{i1}, a_{i2})$). Справді, нехай $a_{i1} \ge 0, a_{i2} \le 0$. Візьмемо на прямій, яка визначається вектором $\vec{N}$ точку $\vec{N}' = (a'_{i1}, a'_{i2})$, причому нехай $a'_{i1} \ge a_{i1}$, тобто точка $\vec{N}'$ лежить далі від початку координат, ніж точка $\vec{N}$. Очевидно також, що $|a'_{i2}| > |a_{i2}|$. У точці $\vec{N}$ числове значення $f_1$ лінійної функції $f = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$ дорівнює $f_1 = a_{i1}^2 + a_{i2}^2$. Аналогічно в точці $\vec{N}'$ значення $f_2 = a_{i1}a'_{i1} + a_{i2}a'_{i2}$. Враховуючи, що $a'_{i1} \ge a_{i1}$ і $|a'_{i2}| > |a_{i2}|$, дістанемо $f_2 > f_1$.

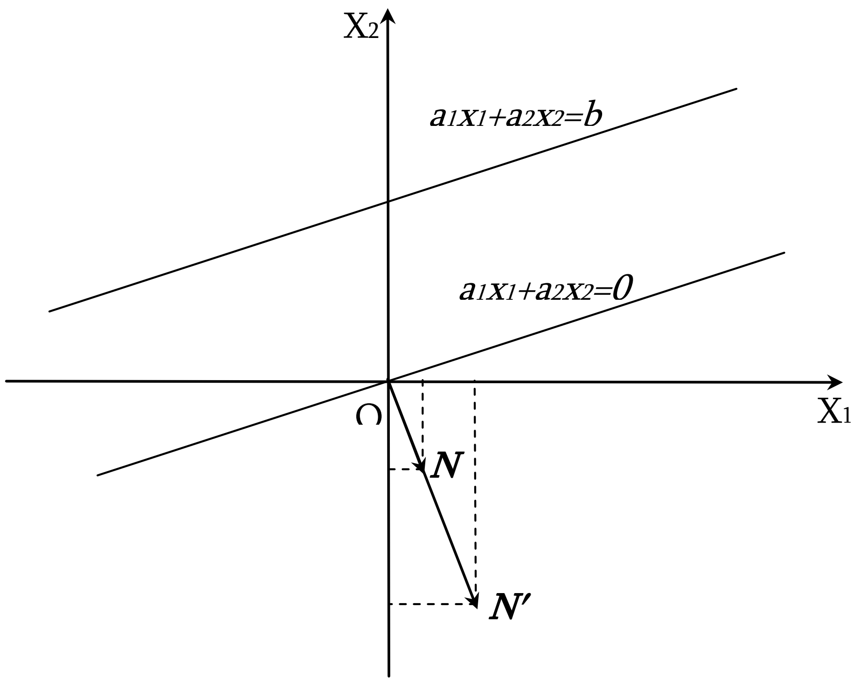



Рис. 3.1

Аналогічно можна пересвідчитись, що напрям зменшення значень лінійної функції $f = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$ збігається з напрямним вектором $-\vec{N} = (-a_{i1}, -a_{i2})$.

Прямі лінії на площині $Ox_1x_2$, які паралельні прямій, що визначається рівнянням $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = 0$ називають *лініями рівнів* лінійної функції $f = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$. Користуючись поняттям напрямного вектора $\vec{N} = (a_{i1}, a_{i2})$, можемо визначити розміщення півплощин $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$ і $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i$ на координатній площині $Ox_1x_2$. Півплощина $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$ розміщена по той бік прямої $f = b_i$, куди показує напрямний вектор $-\vec{N}$. Аналогічно вектор $\vec{N}$ показує, де розміщена півплощина $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i$ відносно прямої $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$.

---

**Приклад 3.3.** Побудувати множину розв’язків нерівності

$3x_1 - 2x_2 \ge 4$.

*Розв’язання*. Відповідно лемі 3.3, множина розв’язків нерівності є півплощина. Щоб визначити, по який бік від граничної прямої $3x_1 - 2x_2 = 4$ розміщена півплощина, що відповідає заданій нерівності, побудуємо напрямний вектор $\vec{N} = (3,-2)$. Напрямний вектор міститься у шуканій півплощині (рис 3.2).

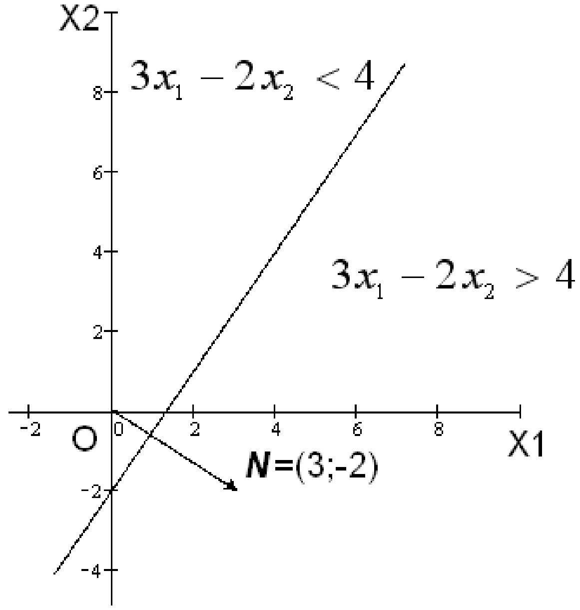



Рис. 3.2

Для перевірки розміщення шуканої півплощини рекомендується задати довільну контрольну точку, яка не лежить на граничній прямій. Якщо нерівність виконується в контрольній точці, то вона виконується й для всіх точок півплощини, яка містить контрольну точку, та не виконується у всіх точках іншої півплощини.

В якості контрольної точки зручно взяти початок координат $O(0,0)$, якщо він не лежить на граничній прямій. Координати точки $O$ не задовольняють нерівність $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \geq 4$, отже, розв'язком даної нерівності є нижня півплощина, яка не містить контрольну точку $O$.

---

Якщо врахувати, що множина точок, що задовольняє рівняння

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \tag{3.16}$$

при $n = 3$, є півплощина, а при $n > 3$ – гіперплощина в n-вимірному просторі, то лему 3.3 можна поширити на випадок трьох і більше змінних.

**Теорема 3.2. Множиною всіх розв'язків лінійної нерівності з $n$ змінними**

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

**є одним з півпросторів, на які весь простір розділяється площиною або гіперплощиною (3.16), включаючи й саму площину (гіперплощину).**

Розглянемо множину розв'язків систем нерівностей.

**Теорема 3.3. Множиною розв'язків сумісної системи** $m$ **лінійних нерівностей з двома змінними**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m$$

**є опуклим многокутником.**

*Доведення.* Кожна з нерівностей у відповідності з лемою 3.3 визначає одну з півплощин, які є опуклими множинами точок. Множиною розв'язків сумісної системи лінійних нерівностей є множина точок, які належать півплощинам-розв'язкам усіх нерівностей, тобто належать їх перетину. Згідно із теоремою про перетин опуклих множин ця множина є опуклою і містить скінчене число кутових точок, тобто є опуклим многокутником.

**Теорема 3.4. Множина розв'язків сумісної системи** $m$ **лінійних нерівностей з** $n$ **змінними є опуклим многогранником в n-вимірному просторі.**

**Теорема 3.5. Множиною всіх допустимих розв'язків сумісної системи** $m$ **лінійних рівнянь з** $n$ **змінними (**$m < n$**) є опуклим многогранником в n-вимірному просторі.**

Доведення цієї та наступної теорем приведено у підрозділі 3.5.

**Теорема 3.6. Оптимальне значення задачі лінійного програмування досягається у вершині многогранника розв'язків системи обмежень.**

Результати цього підрозділу дають змогу так інтерпретувати задачі лінійного програмування:

*У многограннику (многокутнику у випадку двох змінних) розв'язків системи обмежень задачі лінійного програмування знайти таку вершину, де цільова функція набуває оптимального (найбільшого або найменшого) значення.*

## 3.5. Основні аналітичні властивості задач лінійного програмування

В даному підрозділі будемо розглядати основну задачу лінійного програмування у першій стандартній формі.

В підрозділі 3.4 була сформульована, але не доведена наступна теорема.

**Теорема 3.7. Множина усіх допустимих розв'язків системи обмежень задачі лінійного програмування є опуклою.**

*Доведення.* Нехай $\vec{X}_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$ і $\vec{X}_2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right)$ – два допустимих розв'язка задачі (3.8в) – (3.10в), яка задана в матричній формі. Тоді $A\vec{X}_1 = \vec{B}$ і $A\vec{X}_2 = \vec{B}$. Розглянемо опуклу лінійну комбінацію розв'язків $\vec{X}_1$ і $\vec{X}_2$, тобто

$$\vec{X} = \alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 \text{ при } \alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0 \text{ і } \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

та покажемо, що вона також є допустимим розв'язком системи (3.9в). Насправді

$$A\vec{X} = A\left(\alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2\right) = \alpha_1 A\vec{X}_1 + (1-\alpha_1)A\vec{X}_2 = \alpha_1 \vec{B} + (1-\alpha_1)\vec{B} = \vec{B},$$

тобто розв'язок $\vec{X}$ задовольняє системі (3.9в). Але так як $\vec{X}_1 \ge \vec{0}, \vec{X}_2 \ge \vec{0}, \alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0$, то і $\vec{X} \ge \vec{0}$, тобто розв'язок $\vec{X}$ задовольняє і умову (3.10в).

Отже, доведено, що множина усіх допустимих розв'язків задачі лінійного програмування є опуклою, а точніше, являє собою многогранник, який у подальшому будемо називати одним терміном – *многогранником розв'язків*.

Відповідь на запитання, в якій точці многогранника розв'язків можливий оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, дається в наступній фундаментальній теоремі, яка також була сформульована у підрозділі 3.4.

**Теорема 3.8. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то цільова функція приймає максимальне (мінімальне) значення в одній з кутових точок многогранника розв'язків. Якщо цільова функція приймає максимальне (мінімальне) значення більше ніж в одній кутовій точці, то вона приймає його у будь-якій точці, яка є опуклою комбінацією цих точок.**

*Доведення.* Будемо вважати, що многогранник розв'язків є обмеженим. Позначимо його кутові точки через $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$, а оптимальний розв'язок (наприклад, максимум) – через $\vec{X}^*$. Тоді $z\left(\vec{X}^*\right) \geq z\left(\vec{X}\right)$ для всіх точок $\vec{X}$ многогранника розв'язків. Якщо $\vec{X}^*$ – кутова точка, то перша частина теореми доведена.

Припустимо, що $\vec{X}^*$ не є кутовою точкою, тоді $\vec{X}^*$ можна представити як опуклу лінійну комбінацію кутових точок многогранника розв'язків, тобто

$$\vec{X}^* = \alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 + \ldots + \alpha_p \vec{X}_p,$$

$$\alpha_j \geq 0, \ (j = 1,2,\ldots,p), \ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1.$$

Так як $z\left(\vec{X}\right)$ – лінійна функція, то отримуємо

$$z\left(\vec{X}^*\right) = z\left(\alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2 + \ldots + \alpha_p \vec{X}_p\right) = \alpha_1 z\left(\vec{X}_1\right) + \alpha_2 z\left(\vec{X}_2\right) + \ldots + \alpha_p z\left(\vec{X}_p\right). \quad (3.17)$$

В цьому розкладі серед значень $z\left(\vec{X}_j\right)$ $(j = 1,2,\ldots,p)$ виберемо максимальне. Нехай, воно відповідає кутовій точці $\vec{X}_k$ $(1 \leq k \leq p)$; позначимо його через $M$, тобто $z\left(\vec{X}_k\right) = M$. Замінимо у виразі (3.17) кожне значення цим максимальним значенням $M$. Тоді, враховуючи, що $\alpha_j \ge 0,\ \sum_{j=1}^{p}\alpha_j = 1$, знайдемо

$$z\left(\vec{X}^*\right) \le \alpha_1 M + \alpha_2 M + \ldots \alpha_p M = M\sum_{j=1}^{p}\alpha_j = M .$$

За припущенням $\vec{X}^*$ – оптимальний розв'язок, тому, з одного боку, $z\left(\vec{X}^*\right) \ge z\left(\vec{X}_k\right) = M$ , але, з другого боку, доведено, що $z\left(\vec{X}^*\right) \le M$, отже, $z\left(\vec{X}^*\right) = M = z\left(\vec{X}_k\right)$, де $\vec{X}_k$ – кутова точка. Отже, існує кутова точка $\vec{X}_k$, в якій цільова функція приймає максимальне значення.

Для доведення другої частини теореми припустимо, що $z\left(\vec{X}\right)$ приймає максимальне значення більше ніж в одній кутовій точці, наприклад, в точках $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_q$, де $1 \le 1 \le p$. Тоді $z\left(\vec{X}_1\right) = z\left(\vec{X}_2\right) = \ldots = z\left(\vec{X}_q\right) = M$ .

Нехай $\vec{X}$ – опукла лінійна комбінація цих кутових точок, тобто

$$\vec{X} = \alpha_1\vec{X}_1 + \alpha_2\vec{X}_2 + \ldots + \alpha_q\vec{X}_q,\ \alpha_j \ge 0\ \ (j = 1,2,\ldots,q),\ \sum_{j=1}^{q}\alpha_j = 1 .$$

У цьому випадку, враховуючи, що функція $z\left(\vec{X}\right)$ – лінійна, отримуємо

$$\begin{aligned} z\left(\vec{X}\right) &= z\left(\alpha_1\vec{X}_1 + \alpha_2\vec{X}_2 + \ldots + \alpha_q\vec{X}_q\right) = \alpha_1 z\left(\vec{X}_1\right) + \alpha_2 z\left(\vec{X}_2\right) + \ldots + \alpha_q z\left(\vec{X}_q\right) = \\ &= \alpha_1 M + \alpha_2 M + \ldots + \alpha_q M = M\sum_{j=1}^{q}\alpha_j = M \end{aligned},$$

тобто, лінійна функція $z\left(\vec{X}\right)$ приймає максимальне значення у довільній точці $\vec{X}$, яка є опуклою лінійною комбінацією кутових точок $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_q$.

*Зауваження.* Вимога обмеженості многогранника розв'язків в теоремі є суттєвою, так як у випадку необмеженої області не кожну точку такої області можна представити опуклою комбінацією її кутових точок.

Доведена теорема є фундаментальною, так як вона вказує на принциповий шлях розв’язування задач лінійного програмування. Дійсно, згідно цієї теореми замість дослідження нескінченної множини допустимих розв’язків для знаходження серед них оптимального розв’язку необхідно досліджувати лише скінчене число кутових точок многогранника розв’язків.

Наступна теорема присвячена аналітичному методу знаходження кутових точок.

**Теорема 3.9. Кожному допустимому базисному розв’язку задачі лінійного програмування відповідає кутова точка многогранника розв’язків, і навпаки, кожній кутовій точці многогранника розв’язків відповідає допустимий базисний розв’язок.**

*Доведення*. Нехай $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0)$ – допустимий базисний розв’язок системи обмежень (3.9в) задачі, в якому перші $m$ компонент – базисні змінні, а інші $n-m$ компоненти – вільні змінні, які рівні нулю у базисному розв’язку (якщо це не так, то відповідні змінні можна перейменувати). Покажемо, що $\vec{X}$ – кутова точка многогранника розв’язків.

Застосовуючи метод доведення від супротивного, припустимо, що $\vec{X}$ не є кутовою точкою. Тоді точку $\vec{X}$ можна представити як внутрішню точку відрізка, який з’єднує дві різні, не співпадаючи з $\vec{X}$, точки

$$\vec{X}_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots x_m^{(1)}, 0, 0, \ldots, 0\right),$$

$$\vec{X}_2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots x_m^{(2)}, 0, 0, \ldots, 0\right),$$

іншими словами, – опуклої лінійної комбінації точок $\vec{X}_1$ і $\vec{X}_2$ многогранника розв’язків, тобто

$$\vec{X} = \alpha_1 \vec{X}_1 + \alpha_2 \vec{X}_2, \tag{3.18}$$

де $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (вважаємо, що $\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0$, бо у протилежному випадку точка $\vec{X}$ співпадає з точкою $\vec{X}_1$ або $\vec{X}_2$).

Запишемо векторну рівність (3.18) у координатній формі:

$$x_1 = \alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_1^{(2)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$x_m = \alpha_1 x_m^{(1)} + \alpha_2 x_m^{(2)},$$

$$0 = \alpha_1 x_{m+1}^{(1)} + \alpha_2 x_{m+1}^{(2)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$0 = \alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)}.$$

Оскільки $x_j^{(1)} \geq 0, x_j^{(2)} \geq 0, (j = 1,2,\dots,n), \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, то з останніх $n - m$ рівностей випливає, що $x_{m+1}^{(1)} = 0, x_{m+1}^{(2)} = 0, \dots, x_n^{(1)} = 0, x_n^{(2)} = 0$, тобто в розв'язках $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ та $\vec{X}$ системи рівнянь (3.9в) значення $n - m$ компонентів рівні у даному випадку, нулю. Ці компоненти можна вважати значеннями вільних змінних, але значення вільних змінних однозначно визначають значення базисних, отже, $x_1^{(1)} = x_1^{(2)} = x_1, \dots, x_m^{(1)} = x_m^{(2)} = x_m$. Таким чином, усі $n$ компоненти в розв'язках $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ та $\vec{X}$ співпадають, що суперечить припущенню. Отже, $\vec{X}$ – кутова точка многогранника розв'язків.

Доведемо обернене твердження. Нехай, $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ – кутова точка многогранника розв'язків і перші її $m$ координати додатні. Покажемо, що $\vec{X}$ – допустимий базисний розв'язок.

Якщо вектори-стовпці $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m$ лінійно незалежні, то ранг $r$ матриці $A_m$, яка складена з компонентів цих векторів, дорівнює $m$, тобто мінор $|A_m| \neq 0$ і буде базисним мінором матриці $A$, отже, змінні $x_1, x_2, \dots, x_m$ є базисними, і розв'язок $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ – допустимий базисний, тобто твердження доведено.

Розглянемо протилежний випадок, тобто припустимо, що вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m$ лінійно залежні. Тоді в рівності

$$\alpha_1 \vec{P}_1 + \alpha_2 \vec{P}_2 + \dots + \alpha_m \vec{P}_m = \vec{0} \tag{3.19}$$

хоча б один з коефіцієнтів $\alpha_j$ буде відмінним від нуля.

Якщо підставити координати кутової точки $\vec{X}$ многогранника розв'язків в систему обмежень (3.9г), то вона матиме вигляд

$$\vec{P}_1 x_1 + \vec{P}_2 x_2 + \ldots + \vec{P}_m x_m = \vec{B}. \qquad (3.20)$$

Помножимо рівність (3.19) на деяке додатне число $\mu$

$$\mu\alpha_1 \vec{P}_1 + \mu\alpha_2 \vec{P}_2 + \ldots + \mu\alpha_m \vec{P}_m = \vec{0}. \qquad (3.21)$$

Додаючи (3.21) до (3.20) і віднімаючи від неї, одержимо вирази:

$$\vec{P}_1(x_1 + \mu\alpha_1) + \vec{P}_2(x_2 + \mu\alpha_2) + \ldots + \vec{P}_m(x_m + \mu\alpha_m) = \vec{B},$$

$$\vec{P}_1(x_1 - \mu\alpha_1) + \vec{P}_2(x_2 - \mu\alpha_2) + \ldots + \vec{P}_m(x_m - \mu\alpha_m) = \vec{B},$$

з яких випливає, що система умов (3.9г) має два розв'язки:

$$\vec{X}^{(1)} = (x_1 + \mu\alpha_1, x_2 + \mu\alpha_2, \ldots, x_m + \mu\alpha_m, 0, 0, \ldots, 0),$$

$$\vec{X}^{(2)} = (x_1 - \mu\alpha_1, x_2 - \mu\alpha_2, \ldots, x_m - \mu\alpha_m, 0, 0, \ldots, 0),$$

які можуть і не бути допустимими розв'язками, бо при певних $\mu$ та $\alpha_j$ не задовольнятимуть умови невід'ємності компонентів. Внаслідок того, що $x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ додатні і $\mu$ довільне додатне число, то його можна вибрати настільки малим, що всі компоненти векторів $\vec{X}^{(1)}$ та $\vec{X}^{(2)}$ будуть невід'ємними, а отже будуть допустимими розв'язками задачі. Але тоді випливає, що $\vec{X} = \frac{1}{2}\left(\vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)}\right) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0)$, тобто кутова точка многогранника розв'язків є опуклою лінійною комбінацією деяких двох допустимих розв'язків, що неможливо. Отже, вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m$ – лінійно незалежні та $\vec{X}$ – допустимий базисний розв'язок.

З теорем (3.8) і (3.9) безпосередньо випливає важливий наслідок: *якщо задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то він співпадає, принаймні, з одним її допустимим базисним розв'язком.*

Отже, *оптимум цільової функції задачі лінійного програмування слід шукати серед скінченого числа її допустимих базисних розв'язків.*

## 3.6. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Найбільш простим і наочним методом розв'язування задач лінійного програмування є графічний метод. Він застосовується для розв'язування задач лінійного програмування заданих у другій стандартній формі з двома змінними та з багатьма змінними у першій стандартній формі при умові, що вони містять не більше двох вільних змінних.

*Алгоритм розв'язування задач графічним методом:*

1. Будуємо многокутник розв'язків. Він складатиметься з перетину окремих півплощин розв'язків системи обмежень задачі. В силу обмежень $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ многокутник розв'язків завжди міститься у першому квадранті.
2. Будуємо вектор нормалі $\vec{N} = (c_1, c_2)$ прямої $z = c_1x_1 + c_2x_2 = const = c$.
3. Проводимо лінію рівня $z = c_1x_1 + c_2x_2 = c$, яка перпендикулярна вектору $\vec{N}$.
4. Знаходимо оптимальну точку. Пересуваючи лінію рівня перпендикулярно до $\vec{N}$ в напрямку, який вказує вектор нормалі, ми знайдемо вершину, де $z$ набуває найбільшого значення. Для відшукання точки мінімуму треба лінію рівня зсувати в напрямку, протилежному до $\vec{N}$. Якщо виявиться, що лінія рівня паралельна одній зі сторін многокутника розв'язків, то в цьому випадку оптимум досягається у всіх точках відповідної сторони, а задача лінійного програмування буде мати нескінченну множину розв'язків. Кажуть, що така задача має *альтернативний оптимум*, а її розв'язок знаходиться за формулою $\vec{X}_{opt} = (1-t)\vec{X}_1 + t\vec{X}_2$, де $0 \leq t \leq 1$, $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$ – оптимальні розв'язки в кутових точках многокутника розв'язків.
5. Обчислюємо оптимальні значення цільової функції. Для цього знаходимо координати вершин максимуму і мінімуму як спільний

розв’язок рівнянь відповідних граничних прямих, що перетинаються в оптимальних вершинах. Знайдені координати підставляємо у цільову функцію і обчислюємо $z_{\max}$ і $z_{\min}$.

**Приклад 3.4.** Фірма випускає два види морозива: вершкове і шоколадне. Для виготовлення морозива використовуються два вихідних продукти: молоко та наповнювачі; норми витрат яких і добові запаси задані у таблиці:

| Вихідний продукт | Витрати вихідних продуктів на 1 кг морозива | | Запаси, кг |
|---|---|---|---|
| | Вершкове | Шоколадне | |
| Молоко | 0,8 | 0,5 | 400 |
| Наповнювачі | 0,4 | 0,8 | 365 |

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на вершкове морозиво перевищує попит на шоколадне не більше, ніж на 100 кг. Крім того, встановлено, що попит на шоколадне морозиво не перевищує 350 кг за добу. Роздрібна ціна 1 кг вершкового морозива 16 грн., шоколадного – 14 грн.

Яку кількість морозива кожного виду повинна виготовляти фірма, щоб прибуток від реалізації продукції був максимальним?

*Розв’язання*. Позначимо: $x_1$ – добовий об’єм виготовлення вершкового морозива, кг; $x_2$ – добовий об’єм виготовлення шоколадного морозива, кг.

Складемо математичну модель задачі.

Цільова функція буде мати вигляд

$$z = 16x_1 + 14x_2 \to \max$$

при обмеженнях:

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400,$$

$$0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365,$$

$$x_1 - x_2 \le 100,$$

$x_2 \le 350$,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

OABCDE – многокутник розв'язків (рис. 3.3). Побудуємо вектор $\vec{N} = (16,14)$. Лінія рівня $z_0$ задається рівнянням

$16x_1 + 14x_2 = const$.

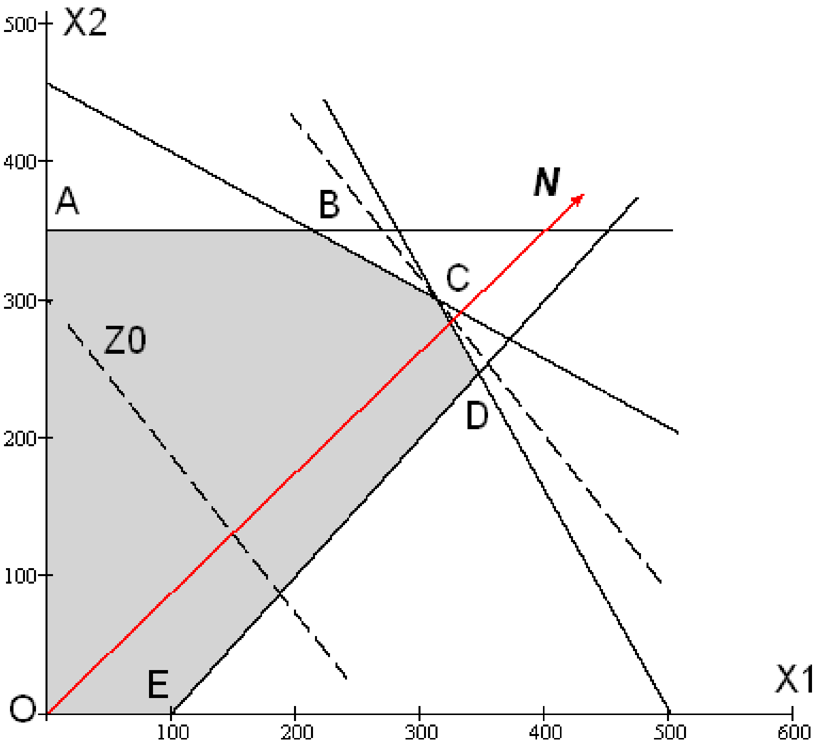



Рис. 3.3

Рухаючись за лініями рівня в напрямку вектора $\vec{N}$, ми переконуємось, що $z_{\max}$ міститься в точці С, координати якої визначаються як перетин граничних прямих, що задаються рівняннями:

$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400$,

$0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365$.

Розв'язуючи систему, отримуємо координати точки $C(312{,}5; 300)$, в якій і буде оптимальний розв'язок, тобто

$x_1 = 312{,}5;\ \ x_2 = 300$,

при цьому

$z_{\max} = 16 \cdot 312{,}5 + 14 \cdot 300 = 9200$.

Таким чином, фірма повинна виготовляти за добу 312,5 кг вершкового і 300 кг шоколадного морозива, при цьому прибуток від реалізації становить 9200 грн.

Проведемо економічний аналіз розглянутої задачі по виготовленню морозива.

Економіко-математична модель задачі має вигляд

$z = 16x_1 + 14x_2 \to \max$

при обмеженнях:

$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400$ (обмеження за молоком), (3.22)

$0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365$ (обмеження за наповнювачами), (3.23)

$x_1 - x_2 \le 100$ (ринкове обмеження за попитом), (3.24)

$x_2 \le 350$ (ринкове обмеження за попитом), (3.25)

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Визначимо, як впливає на оптимальний розв'язок збільшення або зменшення запасів вихідних продуктів. Для аналізу визначимо, що нерівності системи обмежень можуть бути активними і пасивними. Якщо гранична пряма проходить через точку, в якій знаходиться оптимальний розв'язок, то будемо вважати, що відповідне їй *обмеження активне*. В протилежному випадку *обмеження пасивне*.

Якщо обмеження активне, то будемо вважати, що відповідний ресурс є дефіцитним, так як він використовується повністю. Якщо обмеження пасивне, то воно недефіцитне і є у фірмі з надлишком.

Розглянемо збільшення ресурсу правої частини обмеження (3.22) за молоком (рис. 3.4). При переміщенні паралельно собі прямої (3.22) вправо до перетину з прямими (3.23) і (3.24) у точці F обмеження буде залишатися активним. Точку F визначимо як точку перетину прямих (3.23) і (3.24):

$0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365$,

$x_1 - x_2 = 100$.

Звідки отримуємо F(370,83; 270,3).

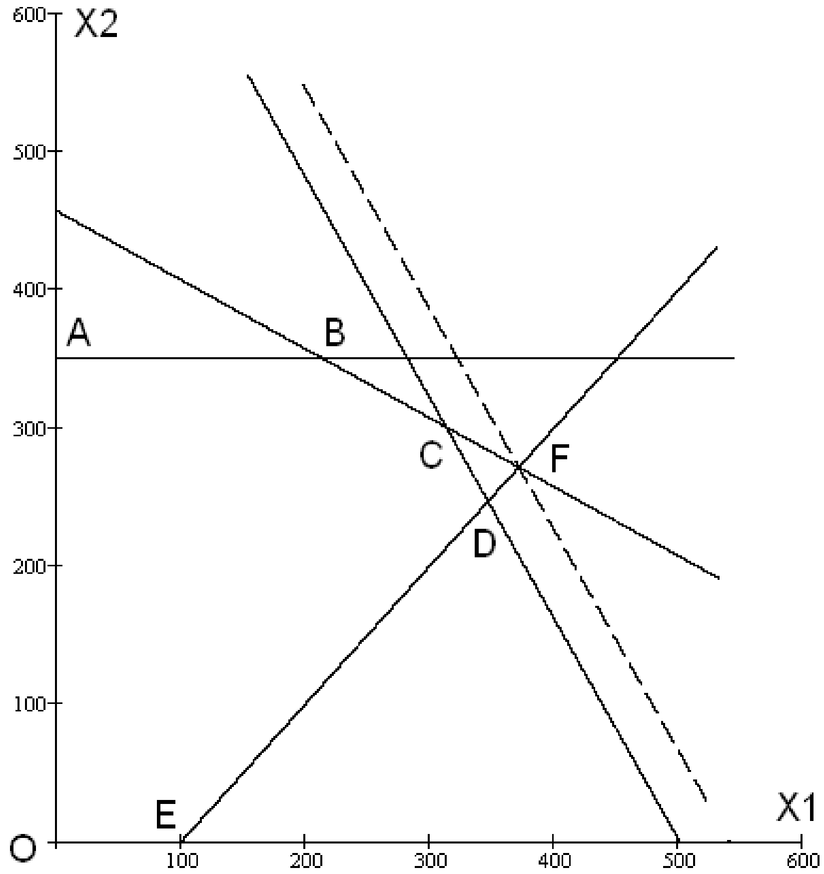



Рис. 3.4

Підставляючи координати точки F в рівняння (3.22), отримуємо гранично допустимий добовий запас молока:

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 0{,}8 \cdot 370{,}83 + 0{,}5 \cdot 270{,}3 = 432{,}1 \text{ кг},$$

при цьому величина прибутку складатиме

$$z = 16 \cdot 370{,}83 + 14 \cdot 270{,}3 = 9724{,}9 \text{ грн.}$$

Розглянемо збільшення обмеження за наповнювачами (рис. 3.5). При переміщенні паралельно собі прямої (3.23) вправо до перетину з прямими (3.22) і (3.25) в точці M обмеження (3.23) буде залишатись активним. Точку M визначимо як перетин прямих

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400,$$

$$x_2 = 350.$$

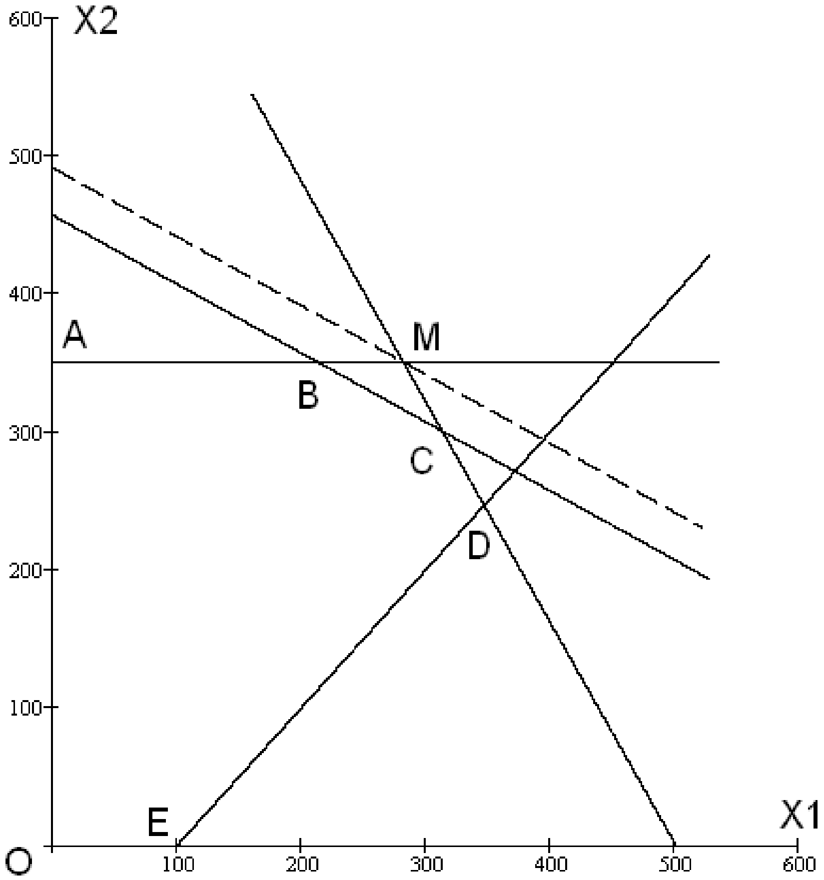



Рис. 3.5

Звідки отримуємо M(281,25; 350).

Гранично допустимий добовий запас наповнювачів можна збільшити до значення

$0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 0{,}4 \cdot 281{,}25 + 0{,}8 \cdot 350 = 392{,}5$ кг,

при цьому величина прибутку складатиме

$z = 16 \cdot 281{,}25 + 14 \cdot 350 = 9400$ грн.

Розглянемо можливість зміни правої частини пасивних обмежень (3.24) і (3.25). Не змінюючи оптимального розв'язку (рис. 3.6), пряму (3.24) можна переміщувати паралельно собі вгору до перетину з точкою C(312,5; 300), тобто праву частину обмеження (3.24) можна зменшувати до величини

$312{,}5 - 300 = 12{,}5$ кг.

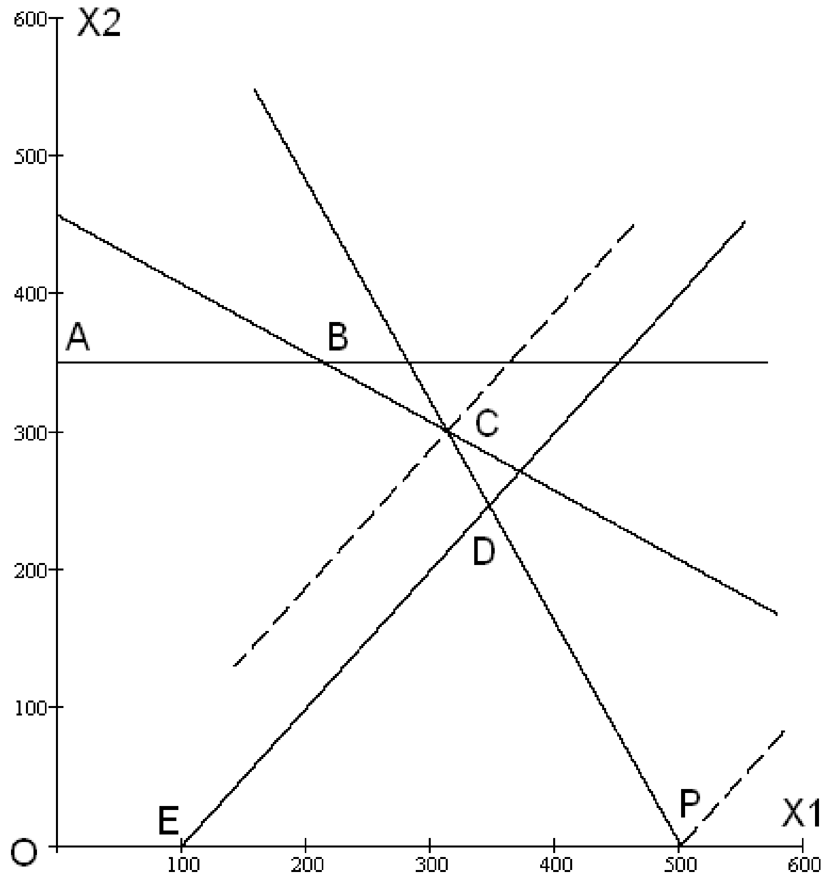



Рис. 3.6

Пряму (3.24) можна переміщувати паралельно собі донизу до перетину з віссю $Ox_1$ в точці P(500; 0), тобто праву частину можна збільшувати до 500 кг.

Таким чином, при незмінному оптимальному розв'язку різниця у споживчому попиті на вершкове і шоколадне морозиво може змінюватись в діапазоні від 12,5 до 500 кг.

Аналогічно, не змінюючи оптимального розв'язку (рис. 3.7), пряму (3.25) можна переміщувати паралельно собі вгору до перетину з віссю $Ox_2$ в точці R(0; 456,25) або вниз до перетину з прямою (3.22) в точці C(312,5; 300).

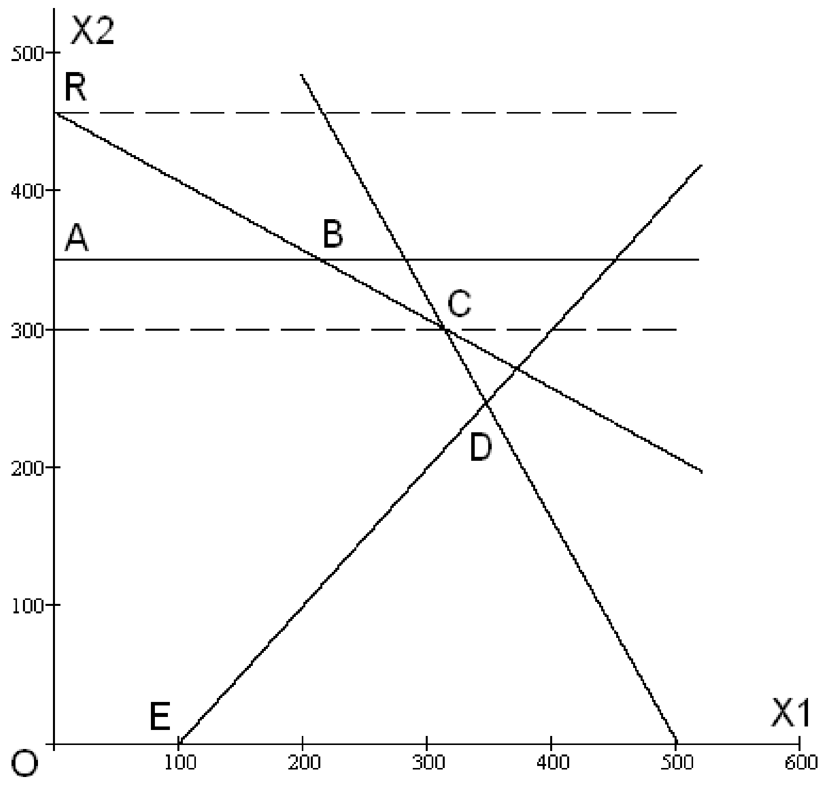



Рис. 3.7

Таким чином, при незмінному оптимальному розв'язку споживчий попит на шоколадне морозиво може змінюватись в діапазоні від 300 до 456,25 кг.

Проведемо аналіз задачі за границями можливої зміни коефіцієнтів цільової функції, тобто по діапазону роздрібних цін на морозиво, при яких не відбувається зміни оптимального розв'язку.

Зміна коефіцієнтів цільової функції впливає на нахил лінії рівня. Рівняння лінії рівня записується в загальному вигляді (рис. 3.3):

$c_1 x_1 + c_2 x_2 = const$.

Кутовий коефіцієнт прямої (3.22):

$K_1 = -8/5$.

Так як прямі співпадають, то $K = K_1$, звідки $c_{1\max} = 22{,}4$ при $c_2 = 14$. Коефіцієнт $c_1$ можна зменшувати до збігу лінії рівня з прямою (3.23), тому

$-c_1/14 = -1/2,\ c_{1\min} = 7$.

Таким чином, оптимальний розв'язок задачі не зміниться, якщо роздрібна ціна 1 кг вершкового морозива лежатиме в діапазоні від 7 до 22,4 грн., при цьому прибуток фірми буде від 6387,5 до 11200 грн.

Аналогічні міркування для випадку $c_1 = 16$ дозволяють зробити висновок, що роздрібна ціна 1 кг шоколадного морозива лежить в діапазоні від 10 до 32 грн., при цьому прибуток фірми буде від 8000 до 14600 грн.

## Питання для самоконтролю

1. Відмінності запису задач лінійного програмування у загальній, стандартній і канонічній формах.
2. Способи переходу від загальної форми задачі лінійного програмування до стандартної.
3. Спрощені записи задач лінійного програмування.
4. Умови графічного розв'язування задач лінійного програмування.
5. Характерні особливості лінії рівня лінійної функції та її градієнта.
6. Алгоритм розв'язування задач лінійного програмування графічним методом.
7. Економічний аналіз задач з використанням графічного методу.

## Вправи

Знайти графічним методом оптимальні розв'язки задач 3.1 – 3.18:

3.1. $z = 3x_1 + 3x_2$,

$5x_1 + 3x_2 \le 15$,

$2x_1 + 6x_2 \le 12$,

$2x_1 \le 6$,

$2x_2 \le 4$,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

3.2. $z = 8x_1 + 6x_2$,

$4x_1 + 3x_2 \le 12$,

$7x_1 + 5x_2 \le 35$,

$0 \le x_1 \le 3$,

$0 \le x_2 \le \frac{19}{3}$.

3.3. $z = 3x_1 + 4x_2$,

$6x_1 + 6x_2 \ge 36$,

$4x_1 + 8x_2 \ge 32$,

$2x_1 \ge 2$,

$x_2 \ge 0$.

3.4. $z = x_1 - 2x_2$,

$x_1 - x_2 \le 1$,

$x_1 + x_2 \ge 2$,

$x_1 - 2x_2 \le 0$,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

3.5. $z = 10x_1 + 14x_2$,

$5x_1 + 7x_2 \ge 35$,

$2x_1 \ge 4$,

$x_2 \ge 1$.

3.6. $z = 5x_1 + 3x_2$,

$3x_1 + 5x_2 \le 15$,

$5x_1 + 2x_2 \le 10$,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

3.7. $z = x_1 + 3x_2$,

$x_1 - x_2 \le 1$,

$2x_1 + x_2 \le 2$,

$x_1 - x_2 \ge 0$,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

3.8. $z = x_1 + x_2$,

$x_1 + 2x_2 \le 10$,

$x_1 + 2x_2 \ge 2$,

$2x_1 + x_2 \le 10$,

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

3.9. $z = 2x_1 + 3x_2$,

$3x_1 + 2x_2 \le 6$,

$x_1 + x_2 \ge 0$,

3.10. $z = 2x_1 + 3x_2$,

$3x_1 + 2x_2 \ge 6$,

$x_1 + 4x_2 \ge 4$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

3.11. $z = -3x_1 + 6x_2$,

$5x_1 - 2x_2 \geq 4$,

$x_1 - 2x_2 \leq -4$,

$x_1 + x_2 \geq 4$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

3.12. $z = -3x_1 + 6x_2$,

$x_1 + x_2 \leq 10$,

$x_1 + 2x_2 \geq 10$,

$3x_1 + 2x_2 \geq 15$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

3.13. $z = -2x_1 + x_2$,

$2x_1 + x_2 \leq 8$,

$x_1 + 3x_2 \geq 6$,

$3x_1 + x_2 \geq 3$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

3.14. $z = 2x_1 - 4x_2$,

$8x_1 - 5x_2 \leq 16$,

$x_1 + 3x_2 \geq 2$,

$2x_1 + 7x_2 \leq 9$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

3.15. $z - -x_1 + 2x_2$,

$5x_1 + 2x_2 \leq 37$,

$x_1 - x_2 \leq -1$,

$2x_1 + 5x_2 \geq 19$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

3.16. $z = x_1 + 4x_2$,

$x_1 + 5x_2 \geq 23$,

$2x_1 + x_2 \geq 11$,

$3x_1 - 2x_2 \leq 13$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

3.17. В майстерні освоїли виробництво столів і тумбочок для торговельної мережі. На їх виготовлення є два види деревини: $Д_1$ – 72 м$^3$ і $Д_2$ – 56 м$^3$. На кожен виріб необхідно одного й другого виду деревини у м$^3$:

| | $Д_1$ | $Д_2$ |
|---|---|---|
| Стіл | 0,18 | 0,08 |
| Тумбочка | 0,09 | 0,28 |

Від виготовлення одного стола майстерня отримує чистого прибутку 11 грн. та від виробництва однієї тумбочки – 7 грн. Визначити, скільки столів і тумбочок повинна виготовляти майстерня з наявних матеріалів, щоб забезпечити максимальний прибуток.

3.18. У добовий раціон включають два продукти харчування П$_1$ і П$_2$, причому продукту П$_1$ повинно увійти не менше 200 одиниць. Вартість 1 од. продукту П$_1$ складає 0,02 грн., продукту П$_2$ – 0,04 грн. Вміст поживних речовин, мінімальні норми споживання вказані у таблиці:

| Поживні речовини | Мінімальна норма споживання | Вміст поживних речовин в 1 од. продукту | |
|---|---|---|---|
| | | П$_1$ | П$_2$ |
| A | 120 | 0,2 | 0,2 |
| B | 160 | 0,4 | 0,2 |

Визначити оптимальний раціон харчування, вартість якого буде найменшою.

Задачі 3.19 – 3.24 привести до другої стандартної форми та розв'язати з використанням графічного методу:

3.19. $z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$,

$x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2$,

$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3$,

$x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, 4)$.

3.20. $z = -4x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 \to \max$,

$2x_1 - x_2 - x_3 = -1$,

$x_1 - 3x_2 - x_4 = -13$,

$4x_1 + x_2 + x_5 = 26$,

$x_1 - 3x_2 + x_6 = 0$,

$x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, 6)$.

3.21. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \min$,

$-x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$,

$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6$,

$10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25$,

$x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, 5)$.

3.22. $z = x_1 - x_2 \to \max$,

$4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6$,

$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15$,

$2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3$,

$x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, 5)$.

3.23. $z = -3x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 \to \max$,

$3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2$,

$4x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 21$,

3.24. $z = x_1 + 3x_2 \to \max$,

$2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10$,

$2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25$,

$4x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 13,$

$x_1 + x_2 - x_6 = 3,$

$x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, 6).$

$2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -9,$

$6x_2 + x_3 + x_4 = 36,$

$x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, 6).$

В задачах 3.25 – 3.27 цільова функція містить параметр $\lambda$. Визначити проміжки значень $\lambda$, при яких оптимальний розв'язок буде співпадати з однією й тією ж кутовою точкою множини розв'язків. В яких проміжках задача не має розв'язків? При яких значеннях $\lambda$ буде нескінченна множина розв'язків?

3.25. $z = 2x_1 + \lambda x_2 \to \max,$

$-x_1 + x_2 \leq 3,$

$x_1 + 2x_2 \leq 12,$

$3x_1 - x_2 \leq 15,$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$

3.26. $z = 2x_1 + x_2 + \lambda x_3 \to \max,$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 3,$

$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 27,$

$x_1 - x_2 + x_5 = 4,$

$x_j \geq 0, (j = 1, \ldots, 5).$

3.27. $z = -x_1 + \lambda x_2 \to \max,$

$-x_1 + x_2 \leq 2,$

$x_1 - 2x_2 \leq 3,$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$

В задачах 3.28 – 3.30 обмеження містять параметр $\mu$. Визначити, при яких значеннях цього параметра задачі будуть мати розв'язки, а при яких ні:

3.28. $z = 2x_1 + x_2 \to \max$

$x_1 - 2x_2 \leq 4,$

$x_1 - x_2 \leq 4,$

$\mu x_1 + x_2 \leq 3,$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$

3.29. $z = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$2x_1 + x_2 \geq 9,$

$x_1 - 3x_2 \leq 1,$

$\mu x_1 - x_2 \leq -2,$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$

3.30. $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min,$

$x_1 + x_2 - x_3 = 1,$

$2x_2 + \mu x_2 + x_3 = 2$,

$x_3 \geq 0$.

Провести аналіз задач 3.31 – 3.33 з використанням графічного методу:

3.31. $z = x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max)$,

$2x_1 + 4x_2 \leq 16$,

$-4x_1 + 2x_2 \leq 8$,

$x_1 + 3x_2 \geq 9$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

3.32. Фірма випускає вироби двох типів: А і В. При цьому використовується сировина чотирьох видів. Витрати сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції та запаси сировини подані у таблиці.

| Вироби | Сировина | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| А<br>В | 2<br>3 | 1<br>0 | 0<br>1 | 2<br>1 |
| Запаси сировини | 21 | 4 | 6 | 10 |

Випуск одиниці виробу типу А приносить прибуток 30 грн., одного виробу типу В – 20 грн. Скласти план виробництва, який забезпечував би фірмі найбільший прибуток.

3.33. Обробка деталей А і В може виконуватись на трьох станках, причому кожна деталь повинна послідовно оброблятись на кожному із станків. Прибуток від реалізації деталі А – 10 грн., деталі В – 16 грн. Вихідні дані наведені у таблиці.

| Станки | Норми часу на обробку однієї деталі, год. | | Час роботи станка, год. |
|---|---|---|---|
| | A | B | |
| 1 | 0,2 | 0,1 | 100 |
| 2 | 0,2 | 0,5 | 180 |
| 3 | 0,1 | 0,2 | 100 |

Визначити виробничу програму, яка максимізує прибуток при умові: попит на деталь А – не менше 300 шт., на деталь В – не більше 200 шт.

# РОЗДІЛ 4
# СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

## 4.1. ІДЕЯ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДУ

У розділі 3 були розглянуті основні теореми лінійного програмування, з яких випливає, що якщо задача лінійного програмування має оптимальний розв’язок, то він відповідає хоча б одній кутовій точці многогранника розв’язків і співпадає, принаймні, з одним із допустимих базисних розв’язків системи обмежень. Таким чином, для того щоб знайти оптимальний розв’язок будь-якої задачі лінійного програмування, необхідно перебрати скінченне число допустимих базисних розв’язків системи обмежень і вибрати серед них той, на якому цільова функція приймає оптимальне значення. Геометрично це означає, що необхідно перебрати усі кутові точки многогранника розв’язків. Такий шлях врешті-решт приведе до оптимального розв’язку (якщо він існує), однак його практичне здійснення пов’язане із значними труднощами, оскільки для реальних задач число допустимих базисних розв’язків хоча і скінченне, але може бути досить великим.

Число допустимих базисних розв’язків, які перебираються, можна скоротити, якщо виконувати перебір не хаотично, а з урахуванням змін значення цільової функції, які відбуваються при переході від одного допустимого розв’язку до іншого.

Основою алгоритму симплексного методу і є ідея цілеспрямованого перебору вершин многогранника планів задачі, при якому забезпечується монотонна зміна значення цільової функції в потрібному напрямі – монотонне зростання чи зменшення залежно від того, що треба знайти – максимум чи мінімум цільової функції. При цьому стає можливим обстеження лише невеликої кількості з усього числа вершин множини розв'язків. Оскільки число вершин опуклого многогранника завжди скінченне, то тим самим забезпечується скінченність алгоритму; виняток становить випадок так званого „зациклювання", коли можливе повторення циклу обстеження тих самих вершин, проте на практиці цього не буває.

Для подальшого викладення введемо означення *опорних розв'язків*.

**Невід'ємний базисний розв'язок (план) будемо називати опорним**.

Обстеження вершин многогранника розв'язків можна почати лише після визначення якоїсь однієї з них, тобто знайшовши початковий опорний план задачі. Тому весь алгоритм симплексного методу поділяють на два етапи: перший – знаходження початкового опорного плану задачі і другий – знаходження оптимального плану.

Вперше симплексний метод був запропонований американським вченим Дж. Данцигом у 1949 р., однак ще в 1939 р. ідеї метода були розроблені Л.В. Канторовичем.

Симплексний метод, який дозволяє знайти розв'язок будь-якої задачі лінійного програмування є універсальним. В даний час він використовується для комп'ютерних розрахунків, однак нескладні приклади із застосуванням симплексного методу можна розв'язувати і ручним способом.

Алгоритм симплексного методу застосовується лише до першої стандартної форми задачі лінійного програмування. Отже, щоб розв'язати задачу, яку подано в загальній чи другій стандартній формі симплексним методом, її слід представити в першій стандартній формі. При цьому часто вдається представити задачу у канонічній формі так, що знаходження опорного плану стає зайвим, оскільки в канонічній формі всі вільні члени системи обмежень будуть невід'ємні і дорівнюють, очевидно, значенням базисних змінних деякого опорного плану. Це можна завжди зробити в задачах, де система обмежень складається з одних лише нерівностей, що зводяться до типу

$a_i x \geq -b_i$ або $a_i x \leq b_i$, де $b_i \geq 0$.

Однак в інших випадках опорний план знаходять, використовуючи загальний алгоритм симплексного методу.

## 4.2. Алгоритм знаходження опорного плану

Розглянемо задачу лінійного програмування у першій стандартній формі (3.8) – (3.10). Щоб знайти опорний план , треба насамперед мати довільний базисний розв'язок системи обмежень (3.9). Це легко зробити, застосовуючи метод повних виключень Жордана-Гаусса. Нагадаємо, що при цьому одночасно вирішується питання про сумісність системи (3.9) та наявність у ній неістотних обмежень, тобто рівнянь, які є лінійними комбінаціями інших, так що надалі вважатимемо систему (3.9) сумісною і всі її рівняння лінійно-незалежними. Запишемо задачу (3.8) – (3.10) у вигляді таблиці:

| № рядка | $x_1$ | $x_2$ | . . . | $x_n$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-c_1$ | $-c_2$ | . . . | $-c_n$ | 0 |
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | . . . | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | . . . | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| m | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | . . . | $a_{mn}$ | $b_m$ |

(4.1)

$x_j \geq 0 \; (j = 1,2,\ldots,n)$.

Нульовий рядок в (4.1) відповідає цільовій функції, яка записана у вигляді рівняння $z - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \ldots - c_n = 0$.

Вибравши ключеві елементи $a_{ij} \neq 0$ послідовно в кожному рядку $(i = 1,2,\ldots,m)$ і зробивши $m$ кроків жорданових виключень, матимемо задачу лінійного програмування (4.2), в якій виконані умови 1 і 3 для канонічної форми (п.3.3). Покладаючи вільні змінні отриманої форми рівними нулю, знайдемо базисний розв'язок основної системи обмежень (3.9): $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = 0, x_{k+1} = \beta_1, \dots, x_{k+i} = \beta_i, \dots, x_n = \beta_m$.

| № | $x_1$ | . . . | $x_j$ | . . . | $x_k$ | $x_{k+1}$ | . . . | $x_{k+i}$ | . . . | $x_n$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\gamma_1$ | . . . | $\gamma_j$ | . . . | $\gamma_k$ | 0 | . . . | 0 | . . . | 0 | Q |
| 1 | $\alpha_{11}$ | . . . | $\alpha_{1j}$ | . . . | $\alpha_{1k}$ | 1 | . . . | 0 | . . . | 0 | $\beta_1$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| i | $\alpha_{i1}$ | . . . | $\alpha_{ij}$ | . . . | $\alpha_{ik}$ | 0 | . . . | 1 | . . . | 0 | $\beta_i$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| m | $\alpha_{m1}$ | . . . | $\alpha_{mj}$ | . . . | $\alpha_{mk}$ | 0 | . . . | 0 | . . . | 1 | $\beta_m$ |

(4.2)

$x_j \geq 0 \; (j = 1,2,\dots,k)$.

Розглянемо два випадки, що стосуються вільних членів (4.2). Перший – усі $\beta_j \geq 0 \, (j = 1,2,\dots,m)$. Тоді ми матимемо канонічну форму задачі лінійного програмування, в якій базисний розв'язок системи (3.9) і буде опорним планом задачі.

Другий випадок – серед вільних членів $\beta_j$ є від'ємні $\beta_p < 0 \, (p = 1,2,\dots,s \leq m)$. Тоді базисний розв'язок основної системи обмежень не задовольняє умову невід'ємності змінних і тому не є планом задачі лінійного програмування. В цьому випадку слід приступити до здійснення першого етапу симплексного методу – знаходження опорного плану.

Для цього відмітимо в (4.2) всі рядки з від'ємними вільними членами.

Введемо означення.

*Систему основних обмежень задачі лінійного програмування будемо називати сумісною в області невід'ємних значень, якщо вона має хоча б один допустимий розв'язок.*

Має місце така теорема.

**Теорема 4.1. Якщо в системі основних обмежень (4.2) є рівняння з від'ємним вільним членом, всі коефіцієнти при вільних змінних якого невід'ємні, то система обмежень несумісна в області невід'ємних значень і в цьому випадку не можна знайти опорний план.**

Доведемо справедливість цього твердження.

Справді, нехай таким рівнянням буде рівняння, яке відповідає і-му рядку. Випишемо його окремо виразивши базисну змінну через вільні змінні

$$x_{k+i} = \beta_i - \alpha_{i1}x_1 - \alpha_{i2}x_2 - \ldots - \alpha_{ik}x_k .$$

Оскільки $\alpha_{ij} \geq 0 \ (j = 1,2,\ldots,k)$ і $\beta_i < 0$, то неможливо одночасно задовольнити вимогу невід'ємності всіх змінних, що входять до цього рівняння, іншими словами, суперечливою буде та частина системи основних обмежень задачі, яка складається з аналогічних рівнянь і обмеження на знаки змінних $x_j \geq 0 \ (j = 1,2,\ldots,k)$.

Це положення залишається справедливим на будь-якому кроці знаходження опорного плану задачі.

Припустимо, що система умов задачі сумісна в області невід'ємних значень. Тоді в (4.2), якщо вона містить від'ємні вільні члени у відповідних рядках, обов'язково знайдуться від'ємні коефіцієнти $\alpha_{pq} < 0$. Нехай таким рядком буде і-й рядок (4.2), в якому $\alpha_{ij} < 0$. Пригадуючи алгоритм повних виключень Жордана-Гаусса, можна легко зрозуміти, що, беручи елемент $\alpha_{ij}$ за ключовий після здійснення одного кроку такого виключення в і-му рядку, дістанемо додатний вільний член

$$\beta_i' = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} > 0 .$$

Отже, якби при цьому всі інші вільні члени зберегли свої знаки, то загальне число від'ємних вільних членів зменшилося на одиницю. Застосовуючи цей крок послідовно, можна було б перейти до таблиці без від'ємних вільних членів.

Однак при такому способі дій у колонці вільних членів нової таблиці кількість від'ємних елементів може навіть збільшитись, оскільки деякі з додатних вільних членів можуть перетворитись на від'ємні.

Розглянемо умови, при яких забезпечується послідовне зменшення числа від'ємних елементів у стовпці вільних членів при перетворенні системи (4.2) способом повних виключень Жордана-Гаусса з означеним вище ключовим елементом $\alpha_{ij}$. Вільні члени, відмінні від вибраного $\beta_i$, перетворюються за формулою

$$\beta_s = \beta_s' - \frac{\alpha_{sj}\beta_i}{\alpha_{ij}},$$

переписавши яку у вигляді

$$\beta_s' = \alpha_{sj}\left(\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} - \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}\right), \tag{4.3}$$

легко дістати умови збереження в довільному s-му рядку $(s \neq i)$ знака вільного члена при перетворенні системи обмежень. Справді, співвідношення $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} > 0$ має місце завжди; розглянемо співвідношення $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$. При $\beta_s \geq 0$ та $\alpha_{sj} < 0$, $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \leq 0$, тобто в круглих дужках виразу (4.3) стоятиме від'ємна величина, а добуток її на від'ємне $\alpha_{sj}$ дає в результаті $\beta_s' > 0$. Отже, в цьому випадку вільний член в s-му рядку нової таблиці залишається додатним. При $\beta_s \geq 0$ та $\alpha_{sj} > 0$, $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} > 0$ і $\beta_s' \geq 0$ лише при умові

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \geq \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}},$$

тобто *елемент* $\alpha_{ij}$ *можна лише тоді вибрати ключовим, коли він буде знаменником найменшого з усіх додатних відношень вільних членів таблиці до відповідних їм (по рядках) елементів ключового стовпчика.*

Цьому правилу не суперечать і випадки, коли $\beta_s < 0$, бо якщо при цьому $\alpha_{sj} > 0$, то $\beta'_s < 0$. Те ж саме дістанемо і при $\beta_s < 0$, $\alpha_{sj} < 0$ та $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \ge \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$; $\beta'_s < 0$, тобто в усіх цих випадках знак *s*-го вільного члена нової таблиці буде тим самим, що і знак *s*-го вільного члена в попередній таблиці, за винятком, звичайно, $\beta_i$. Нехай нарешті, деякі з вільних членів $\beta_s = 0$; тоді для довільного додатного співвідношення $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$ знак $\beta'_s$ залежатиме від знака $\alpha_{sj}$ і для $\alpha_{sj} > 0$, $\beta'_s < 0$ і навпаки для $\alpha_{sj} < 0$, $\beta'_s > 0$. Однак, приписуючи відношенню $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} = 0$ знак плюс, бачимо, що саме воно буде найменшим серед додатних відношень, а отже, *s*-й вільний член нової таблиці лише тоді дорівнюватиме нулю (навіть при $\alpha_{sj} > 0$), коли і $\beta_i = 0$ $\left(\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = 0\right)$, тобто коли ключовий елемент взято у рядку з нульовим вільним членом. При цьому решта елементів, відмінних від нуля, зберігають, як це випливає з аналізу формули (4.3), свій знак.

Зазначене вище можна використати для послідовного зменшення кількості від’ємних вільних членів системи обмежень (4.2) у випадку, коли серед них немає нулів та відношення $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$ є найменшим з усіх додатних відношень $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} > 0 \ (s = 1,2,\ldots,m)$.

Справді, за кожним таким перетворенням таблиці в стовпчику вільних членів один від’ємний елемент, а саме вільний член ключового рядка, перетворюється на додатний. Однак зрозуміло, що в багатьох випадках система обмежень (4.2) не допускає здійснення цього способу дій, бо знаменником найменшого додатного відношення в ключовому стовпчику може бути додатний елемент. В цьому випадку залишається зробити єдине – взявши цей елемент за ключовий, перейти до нової таблиці, сподіваючись дістати в ній стовпчик, від'ємний елемент якої буде знаменником найменшого додатного співвідношення, чисельником якого буде від'ємний елемент стовпчика вільних членів. Зробивши скінченне число перетворень таблиці, матимемо лише два результати:

1) або переконаємось у суперечливості умов задачі;
2) або ж дістанемо таблицю, яка містить у деякому стовпчику від'ємний елемент, що буде знаменником найменшого додатного відношення елементів стовпчика вільних членів до елементів даного стовпчика, тобто випадок, коли можна застосовувати формулу (4.3).

Скінченність алгоритму знаходження опорного плану випливає з скінченності числа базисних розв'язків основної системи обмежень задачі лінійного програмування у першій стандартній формі, яке не більше ніж $C_n^m$, а описана вище спрямованість пошуку опорного плану виключає необхідність обстеження (перебору) всіх базисних розв'язків основної системи обмежень (3.9) і зводить його до перевірки невеликого числа базисних розв'язків.

Сформулюємо **правила алгоритму знаходження опорного плану задачі лінійного програмування** (3.8) – (3.10):

1. Діставши довільний базисний розв'язок основної системи обмежень (3.9) задачі у вигляді (4.2), розглянемо стовпчик вільних членів. Може бути два випадки:

a) якщо в стовпчику вільних членів немає від'ємних, то знайдений базисний розв'язок і є опорним планом задачі;
b) якщо стовпчик вільних членів містить хоча б один від'ємний елемент, то базисний розв'язок не є планом задачі і слід приступити до знаходження опорного плану.

2. Відмічаємо який-небудь від'ємний вільний член (для упорядкування вибору беруть, звичайно, хоч це і не обов'язково, найбільший за модулем від'ємний вільний член), розглядаємо елементи відповідного йому рядка. Може бути два випадки:

а) рядок не містить від'ємних елементів, крім вільного члена, і тоді система умов задачі несумісна в області невід'ємних розв'язків;

б) серед елементів рядка є від'ємні елементи і тоді стовпчик, який містить шуканий від'ємний елемент, беремо за ключовий.

3. Розглядаємо всі невід'ємні співвідношення елементів стовпчика вільних членів до відповідних їм (по рядках) елементів ключового стовпчика і відмічаємо серед них найменше. Якщо відмічене співвідношення не дорівнює нулю, то його знаменник вибирають ключовим елементом. Якщо ж відмічене мінімальне співвідношення дорівнює нулю, то його знаменник беруть ключовим елементом лише тоді, коли він додатний; якщо ж цей елемент від'ємний, то ключовим елементом слід взяти знаменник найменшого додатного відношення, відмінного від нуля.

4. Робимо крок повного жорданового виключення з вибраним ключовим елементом і переходимо до нової таблиці.

5. Розглядаємо нову таблицю і, в разі потреби, повторюємо дії, описані в правилах 1–4 доти, поки не матимемо таблицю з невід'ємними вільними членами – опорний план задачі.

---

**Приклад 4.1.** Наведемо приклад числової реалізації описаного алгоритму.

Знайдемо якийсь з опорних планів задачі

$z = x_1 + 2x_2 \to \max$;

$x_1 + x_2 + x_3 = 6$;

$x_1 - 4x_2 + x_4 = 0$;

$-x_1 + 2x_2 + x_5 = 3$;

$-2x_1 - x_2 + x_6 = -2$;

$-x_1 - 2x_2 + x_7 = -3$;

$x_j \geq 0 \; (j = 1,2,\ldots,7)$.

Запишемо систему основних обмежень у вигляді таблиці:

| № рядка | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\beta$ | $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | –1 | –2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | – |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6/1 |
| 2 | $\boxed{1}$ | –4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0/1 |
| 3 | –1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 3/(–1) |
| 4 | –2 | –1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | –2 | –2/(–2) |
| 5 | –1 | –2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | –3 | –3/(–1) |

Відмічаємо п'ятий рядок, що містить більший за модулем від'ємний вільний член –3. Виберемо перший стовпчик за ключовий, оскільки у цьому стовпчику і п'ятому рядку стоїть від'ємний елемент $\alpha_{51} = -1$. Зрозуміло, що другий стовпчик також можна було б взяти за ключовий, оскільки $\alpha_{52} = -2 < 0$. Взявши за ключовий перший стовпчик, розглянемо всі невід'ємні відношення $\frac{\beta_s}{\alpha_{s1}} = \frac{6}{1}; \frac{0}{1}; \frac{-2}{-2}; \frac{-3}{-1}$. Серед них найменшим буде $\frac{0}{1} = 0$. Оскільки в знаменнику цього відношення стоїть додатний елемент, то беремо його за ключовий.

| № рядка | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\beta$ | $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | –6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | – |
| 1 | 0 | 5 | 1 | –1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6/5 |
| 2 | 1 | –4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0/(–4) |
| 3 | 0 | –2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 3/(–2) |
| 4 | 0 | $\boxed{-9}$ | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | –2 | –2/(–9) |
| 5 | 0 | –6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | –3 | –3/(–6) |

Розглянемо знову останній рядок і згідно з наведеними правилами вибираємо ключовий елемент $\alpha_{42} = -9$. Переходимо до нової таблиці:

| № рядка | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\beta$ | $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | –3/9 | 0 | –6/9 | 0 | 12/9 | – |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1/9 | 0 | 5/9 | 0 | 44/9 | 44/5 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1/9 | 0 | –4/9 | 0 | 8/9 | –2 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 5/9 | 1 | –2/9 | 0 | 31/9 | –31/2 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | –2/9 | 0 | –1/9 | 0 | 2/9 | –2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | –3/9 | 0 | $\boxed{-6/9}$ | 1 | –15/9 | 15/6 |

Зробивши ще один крок з ключовим елементом –6/9, дістаємо таблицю, яка містить опорний план $\vec{X} = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0, 4, \frac{5}{2}, 0\right)$:

| № рядка | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | –1 | 3 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | –1/6 | 0 | 0 | 5/6 | 7/2 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | –1/2 | 0 | 0 | –2/3 | 2 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 2/3 | 1 | 0 | –1/3 | 4 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | –1/6 | 0 | 0 | –1/6 | 1/2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1 | –3/2 | 5/2 |

## 4.3. Алгебра симплексного методу

Приступимо до другого етапу симплексного методу – знаходження оптимального плану. Оптимальний план задачі лінійного програмування знаходиться серед опорних планів цієї задачі. Тому слід знайти спосіб визначення всіх опорних планів задачі.

Нехай знайдено деякий з опорних планів задачі лінійного програмування. Отже задачу можна записати в канонічній формі (4.2)

$$
\begin{aligned}
&z = Q + \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_j x_j + \ldots + \gamma_k x_k \to \max ,\\
&\alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{1j} x_j + \ldots + \alpha_{1k} x_k + x_{k+1} = \beta_1 ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\\
&\alpha_{i1} x_1 + \ldots + \alpha_{ij} x_j + \ldots + \alpha_{ik} x_k + x_{k+i} = \beta_i ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\\
&\alpha_{m1} x_1 + \ldots + \alpha_{mj} x_j + \ldots + \alpha_{mk} x_k + x_n = \beta_m ,\\
&x_j \ge 0 \ (j = 1,2,\ldots,n),\ \beta_i \ge 0 \ (i = 1,2,\ldots,m),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

а її опорний план

$$\vec{X}_1 = (x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_k = 0, x_{k+1} = \beta_1, \ldots, x_{k+i} = \beta_i, \ldots, x_n = \beta_m),$$

що надає цільовій функції значення $z(\vec{X}_1) = Q$.

Поставимо задачу переходу до такого нового опорного плану задачі, який надавав би цільовій функції значення, ближчого до шуканого екстремуму. Нехай цим екстремумом буде максимум цільової функції. В (4.4) функція мети представлена як функція вільних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Можна вважати, що коефіцієнти при базисних невідомих у цільовій функції дорівнюють нулю. Розглянемо знаки коефіцієнтів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ цільової функції $z$. Може бути два випадки: 1) всі $\gamma_q \le 0$; 2) деякі або всі $\gamma_q > 0$.

Розглянемо перший випадок. Цілком зрозуміло, що при всіх $\gamma_q \le 0$ перехід до будь-якого іншого опорного плану, відмінного від $\vec{X}_1$, може лише зменшити цільову функцію. Справді, нехай від (4.4) зроблено перехід до нової форми задачі, де всі $\beta'_p \ge 0$, тобто маємо другий опорний план, причому змінна $x_j$ перейшла в базис замість змінної $x_{k+i}$, тоді маємо $z' = z(\vec{X}_2) = Q + \gamma_j x_j$. Оскільки $\gamma_j \le 0$ і $x_j = \beta'_i \ge 0$, то

$$z(\vec{X}_1) = Q \ge z(\vec{X}_2) = Q + \gamma_j x_j = Q + \gamma_j \beta'_i .$$

Отже, опорний план $\vec{X}_1$ в цьому випадку буде оптимальним і *ознакою оптимальності при знаходженні максимуму цільової функції буде недодатність коефіцієнтів цільової функції* $z$.

Розглянемо другий випадок. Нехай деяке з $\gamma_q$, наприклад, $\gamma_j > 0$. Тоді, вводячи в базис вільну змінну $x_j$ дістанемо нерівність

$$z\left(\vec{X}_2\right) = Q + \gamma_j x_j \geq Q = z\left(\vec{X}_1\right),$$

і, отже, новий опорний план може надати цільовій функції значення, більшого від попереднього.

Знайдемо правила переходу до нового опорного плану, який надавав би цільовій функції значення більшого за попереднє.

Нехай $\gamma_j > 0$. Виберемо *j*-й стовпчик основної системи обмежень (4.4). Може бути два випадки: 1) у вибраному стовпчику є додатні коефіцієнти $\alpha_{ij}$; 2) вибраний стовпчик не містить додатних коефіцієнтів, тобто всі $\alpha_{ij} \leq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Розглянемо перший випадок. Оскільки $\gamma_j > 0$, збільшення $x_j$ збільшує форму на допустимому плані $(0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, на якому задача (4.4) має вигляд

$$\begin{aligned} & z = Q + \gamma_j x_j \to \max, \\ & \alpha_{1j} x_j + x_{k+1} = \beta_1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \alpha_{ij} x_j + x_{k+i} = \beta_i, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \alpha_{mj} x_j + x_n = \beta_m, \\ & x_j \geq 0, x_{k+1} \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Розіб'ємо рівності в (4.5) на дві групи: до першої віднесемо ті, в яких коефіцієнти $\alpha_{ij} \leq 0$, до другої – ті, де $\alpha_{ij} > 0$. З'ясуємо, якого найбільшого значення може набувати $x_j$. Візьмемо довільну рівність з (4.5)

$$x_{k+s} = \beta_s - \alpha_{sj} x_j, \quad 1 \leq s \leq m.$$

Оскільки для рівнянь першої групи $\alpha_{sj} \le 0$, то при будь-яких $x_j \ge 0$, $\beta_s - \alpha_{sj} x_j \ge 0$, тому ці рівності не накладають на $x_j$ жодних обмежень зверху. Інша картина в рівностях другої групи. При

$$x_j = \frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \quad (\alpha_{sj} > 0)$$

базисна невідома $x_{k+s}$ перетворюється на нуль і при подальшому збільшенні $x_j$ стає від'ємною, що недопустимо. Для того щоб розв'язок залишався допустимим, $x_j$ може набувати найбільшого значення, яке визначається співвідношенням

$$\Delta = \min_{1 \le s \le m} \frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \quad (\alpha_{sj} > 0) \tag{4.6}$$

Елемент $\alpha_{sj}$, який реалізує рівність (4.6), вибирається за ключовий.

Розглянемо другий випадок. З правил вибору ключового елемента можна зробити такий важливий висновок.

*Якщо деякий коефіцієнт цільової функції* $\gamma_j > 0$*, а в системі основних обмежень всі коефіцієнти* $\alpha_{ij} \le 0$, $1 \le i \le m$*, то така задача лінійного програмування не має розв'язку*.

Дійсно, всі рівності системи основних обмежень (4.4) мають належати до першої групи. Невідома $x_j$ може набувати будь-яких великих значень та цільова функція є необмеженою зверху

$$\lim_{x_j \to \infty} (Q + \gamma_j x_j) = +\infty .$$

Тому задача лінійного програмування не має оптимального плану.

Припустимо, що ключовим є елемент $\alpha_{ij}$. Перехід до нового опорного плану задачі означає, що $x_j$ переводиться в базисні змінні, а замість неї $x_{k+i}$ повинна стати вільною. Запишемо канонічну форму, що відповідає новому базису. З $i$-го рівняння (4.4) знаходимо

$$x_j = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} - \left( \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}} x_{j-1} + \frac{1}{\alpha_{ij}} x_{k+i} + \frac{\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}} x_{j+1} + \ldots + \right. \tag{4.7}$$

В інші рівняння (4.4) замість $x_j$ підставимо (4.7)

$$\alpha_{s1}x_1 + \ldots + \alpha_{sj-1}x_{j-1} +$$
$$+ \alpha_{sj}\left[ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} - \left( \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}} x_{j-1} + \frac{1}{\alpha_{ij}} x_{k+i} + \frac{\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}} x_{j+1} + \ldots + \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}} x_k \right) \right] +$$
$$+ \alpha_{sj+1}x_{j+1} + \ldots + \alpha_{sk}x_k = \beta_s .$$

Звівши подібні члени, для $1 \le s \le m$ (за винятком $i$-го рівняння), дістанемо

$$\left( \alpha_{s1} - \alpha_{sj} \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}} \right) x_1 + \ldots + \left( \alpha_{sj-1} \frac{\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}} \right) x_{j-1} - \frac{\alpha_{sj}}{\alpha_{ij}} x_{k+i} +$$
$$+ \left( \alpha_{sj+1} - \alpha_{sj} \frac{\alpha_{sj+1}}{\alpha_{ij}} \right) x_{j+1} + \ldots + \left( \alpha_{sk} - \alpha_{sj} \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}} \right) x_k + x_{k+s} = \beta_s - \alpha \tag{4.8}$$

На місці $i$-го рівняння буде таке:

$$\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}} x_{j-1} + \frac{1}{\alpha_{ij}} x_{k+i} + \ldots + \frac{\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}} x_{j+1} + \ldots + \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}} x_k + x_j \tag{4.9}$$

Цільова функція має вигляд:

$$z' = Q + \gamma_j \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} + \left( \gamma_1 - \gamma_j \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}} \right) x_1 + \ldots + \left( \gamma_{j-1} - \gamma_j \frac{\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}} \right) x_{j-1} - \frac{\gamma_i}{\alpha_{ij}}$$
$$+ \left( \gamma_{j+1} - \gamma_j \frac{\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}} \right) x_{j+1} + \ldots + \left( \gamma_k - \gamma_j \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}} \right) x_k . \tag{4.10}$$

Формули (4.8) – (4.10) обґрунтовують правила вибору за методом Жордана-Гаусса наступного опорного плану, якщо попередній не був оптимальним.

Подивимось, як зміниться критерій оптимальності опорного плану задачі лінійного програмування, якщо треба відшукати мінімум цільової функції.

Пригадавши, що задача на мінімізацію цільової функції зводиться до задачі на максимізацію зміною знаків цільової функції на протилежні, приходимо до висновку, що *ознакою оптимальності опорного плану при знаходженні мінімуму цільової функції буде невід'ємність коефіцієнтів цільової функції.*

## 4.4. Симплексні таблиці

Практичні розрахунки при розв'язуванні реальних задач симплексним методом виконуються за допомогою ЕОМ. Однак якщо розрахунки здійснюються без застосування ЕОМ, то зручно використовувати так звані симплексні таблиці.

Немає потреби при кожній ітерації виписувати формули (4.8) – (4.10), тому що можна формалізувати, використовуючи симплексні таблиці. При роботі з симплексними таблицями не розрізняють, де обмеження, а де оптимізуюча функція. Тому записують цільову функцію у вигляді рівняння $z - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2 - \ldots - \gamma_k x_k = Q$.

Наведемо **алгоритм роботи із симплексними таблицями**.

1. Задачу лінійного програмування записану в канонічній формі заносять у першу симплексну таблицю. В нульовий рядок таблиці заносять рівняння, що відповідає цільовій функції. В стовпчик „Базис" таблиці заносяться базисні змінні, а в стовпчик „ОП" (опорний план) – вільні члени. Останній стовпчик підготовлений для оціночних відношень $\Delta$ вільних членів до відповідних чисел ключового стовпчика, які необхідні для визначення ключового елемента. В робочу частину таблиці (починаючи з п'ятого стовпчика і першого рядка) заносять коефіцієнти $\alpha_{ij}$ при змінних.

2. Перевіряють виконання критерію оптимальності. *Якщо цільова функція максимізується і в нульовому рядку відсутні від’ємні числа (за винятком, хіба що, стовпчика „ОП”), то опорний план є оптимальним. Якщо цільова функція мінімізується, то критерієм оптимальності розв’язку є відсутність додатних членів в нульовому рядку*.
3. Якщо критерій оптимальності не виконаний, то найбільший за модулем від’ємний коефіцієнт в нульовому рядку задачі на максимум (найбільший за модулем додатний коефіцієнт задачі на мінімум) визначає ключовий стовпчик *j*.
4. Складають оціночні відношення кожного рядка за такими правилами: а) ∞, якщо $\alpha_{sj} \le 0$; б) 0, якщо $\beta_s = 0$ і $\alpha_{sj} > 0$; в) $\frac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$, якщо $\beta_s \ne 0$ і $\alpha_{sj} > 0$. Визначають $\min\limits_s \left( \frac{\beta_s}{\alpha_{sj}} \right)$. Якщо скінченного мінімуму не має, то задача лінійного програмування не має скінченного оптимуму. Якщо мінімум скінченний, то обирають рядок *i*, на якому він досягається, за ключовий. На перетині ключового рядка і ключового стовпчика знаходиться ключовий елемент $\alpha_{ij}$.
5. Переходять до наступної таблиці за правилами:

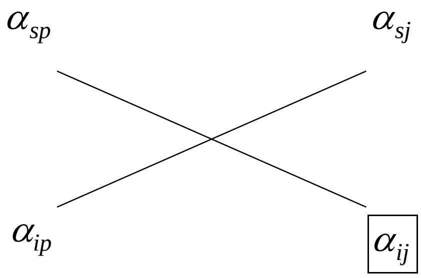
а) у стовпчику „Базис” записують новий базис: замість базисної змінної $x_i$ вводять вільну змінну $x_j$;

б) у стовпчиках, які відповідають базисним змінним, проставляють нулі і одиниці: 1 – напроти „своєї” базисної змінної, 0 – напроти „чужої” базисної змінної, 0 – в нульовому рядку для усіх базисних змінних;

в) новий рядок на місті ключового (рядок з номером *i*) отримують діленням старого на ключовий елемент $\alpha_{ij}$;

г) всі інші елементи $\alpha'_{sp}$ обчислюють за *правилом прямокутника*:

$$\alpha'_{sp} = \alpha_{sp} - \frac{\alpha_{sj}\alpha_{ip}}{\alpha_{ij}}$$




$$\beta'_s = \beta_s - \frac{\alpha_{sj}\beta_i}{\alpha_{ij}}$$

Далі переходять до п. 2 алгоритму.

Правила роботи із симплексними таблицями розглянемо на прикладі

---

**Приклад 4.2.**

$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$,

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$,

$2x_1 - x_2 + x_4 = 4$,

$x_j \geq 0 \ \left( j = 1, 2, 3, 4 \right)$.

*I ітерація*. Запишемо цільову функцію у вигляді рівняння

$z - 3x_1 - 2x_2 = 0$.

Вихідна задача є канонічною формою і тому заповнюємо першу симплексну таблицю.

| Номер ітерації | Номер рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | $z$ | 0 | –3 | –2 | 0 | 0 | – |
| I | 1 | $x_3$ | 12 | 2 | 3 | 1 | 0 | 6 |
| | 2 | $x_4$ | 4 | $\boxed{2}$ | –1 | 0 | 1 | 2 |

Цільова функція в задачі максимізується, тому у випадку оптимального плану в нульовому рядку повинні бути відсутні від'ємні числа. У нашому випадку в нульовому рядку є два від'ємні числа (–3 і –2). Беремо найбільше за модулем (–3). Стовпчик „$x_1$" буде ключовим.

Для вибору ключового елемента складаємо відношення вільних членів (чисел стовпчика „ОП”) до відповідних чисел ключового стовпчика: 1) 12:2=6; 2) 4:2=2.

Друге відношення менше, тому число „2” другого рядка буде ключовим елементом. Ключовий елемент у таблиці позначаємо квадратом і переходимо до другої ітерації.

| Номер ітерації | Номер рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| II | 0 | $z$ | 6 | 0 | –7/2 | 0 | 3/2 | – |
| | 1 | $x_3$ | 8 | 0 | $\boxed{4}$ | 1 | –1 | 2 |
| | 2 | $x_1$ | 2 | 1 | –1/2 | 0 | 1/2 | ∞ |

*II ітерація*. Після заповнення таблиці перевіряємо її опорний план на оптимальність. Помічаємо, що нам треба перейти до наступного опорного плану, оскільки у нульовому рядку стовпчика „$x_2$" є від'ємне число (–7/2). Відношення 8:4=2 (у другому рядку відношення дорівнює ∞) вказує, що за ключовий елемент слід взяти число 4.

*III ітерація*. У симплексній таблиці замість базисної змінної $x_3$ тепер буде нова базисна змінна $x_2$.

| Номер ітерації | Номер рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| III | 0 | $z$ | 13 | 0 | 0 | 7/8 | 5/8 |
| | 1 | $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 1/4 | –1/4 |
| | 2 | $x_1$ | 3 | 1 | 0 | 1/8 | 3/8 |

У нульовому рядку вже немає від'ємних чисел, тому опорний план є оптимальним. Виписуємо його із стовпчика „ОП":

$$x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ z_{\max} = 13.$$

*Зауваження 1*. Кожній таблиці відповідає своя канонічна форма запису основної задачі лінійного програмування. Так, за останньою таблицею можна записати таку канонічну форму:

$$z = 13 - \frac{7}{8}x_3 - \frac{5}{8}x_4 \to \max,$$

$$x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 2,$$

$$x_1 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 = 3,$$

$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4)$.

*Зауваження 2.* Контролювати правильність обчислення опорних планів і оптимального значення цільової функції можна за вихідною формулою:

$z_{\max} = 3 \times 3 + 2 \times 2 = 13$.

*Зауваження 3.* При розв’язуванні задачі симплексним методом таблиці послідовно записують одна під одною. У нашому прикладі вони мають такий вигляд:

| Номер ітерації | Номер рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 0 | $z$ | 0 | –3 | –2 | 0 | 0 | – |
| | 1 | $x_3$ | 12 | 2 | 3 | 1 | 0 | 6 |
| | 2 | $x_4$ | 4 | $\boxed{2}$ | –1 | 0 | 1 | 2 |
| II | 0 | $z$ | 6 | 0 | –7/2 | 0 | 3/2 | – |
| | 1 | $x_3$ | 8 | 0 | $\boxed{4}$ | 1 | –1 | 2 |
| | 2 | $x_1$ | 2 | 1 | –1/2 | 0 | 1/2 | $\infty$ |
| III | 0 | $z$ | 13 | 0 | 0 | 7/8 | 5/8 | |
| | 1 | $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 1/4 | –1/4 | |
| | 2 | $x_1$ | 3 | 1 | 0 | 1/8 | 3/8 | |

*Зауваження 4.* При знаходженні оптимального плану слід насамперед обчислювати елементи цільового рядка (нульовий рядок). Якщо всі вони задовольняють (у новій таблиці) умову оптимальності, то можна обчислити лише нові значення змінних оптимального плану задачі у стовпчику „ОП”, а решту величин не обчислювати.

## 4.5. Метод штучного базису (М–метод)

Як зазначалось в п. 4.3, система умов задачі лінійного програмування містила одиничну матрицю і всі вільні члени невід’ємні; тим самим припускалось, що опорний план задачі відомий. Якщо цього немає, то необхідно знайти деякий базисний розв'язок основної системи обмежень, після чого перейти до знаходження опорного плану.

Канонічна форма задачі легко будується, коли система обмежень записана у другій стандартній формі:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le \beta_i, \quad \beta_i \ge 0 \ \left(i = 1, 2, \ldots, m\right).$$

При такому типі обмежень введені додаткові невідомі надавали системі обмежень канонічної форми:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + x_{n+i} = \beta_i, \quad \beta_i \ge 0 \ \left(i = 1, 2, \ldots, m\right).$$

Але така структура обмежень не охоплює всіх можливих випадків, що трапляються в лінійних оптимізаційних моделях.

Метод штучного базису, або М-метод, дає можливість сумістити етапи знаходження деякого базисного і опорного розв'язків системи обмежень. Завдяки чому вдається скоротити загальний обсяг обчислень і, крім того, встановити одночасно, чи існує взагалі хоча б один план задачі, чи система її умов суперечлива. Ідея методу полягає в тому, що до лівої частини кожного *i*-го рівняння – обмеження задачі, яка задана у першій стандартній формі і не має одиничного базису, додають по одній штучній змінній $u_i \ge 0$, утворюючи таким чином штучний базис. Отже, в початковій таблиці всі основні (природні) змінні будуть вільними і мають дорівнювати нулю в штучному базисному розв'язку (штучному опорному плані), а *штучні змінні* (фактичні нулі) дорівнюватимуть правим частинам основної системи обмежень:

$$\vec{X} = \left(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,\ u_1 = \beta_1, u_2 = \beta_2, \ldots, u_m = \beta_m\right).$$

Отже, план, який містить хоча б одну штучну змінну, відмінну від нуля (тобто в базисі), є суперечливим. Щоб знайти деякий план задачі, треба всі штучні змінні вивести з базису. Якщо цього зробити не можна, то це свідчить про суперечливість умов задачі.

Метод штучного базису дозволяє у разі нерівностей зі знаком „≥” нескладними перетвореннями дістати додатний базис. Для цього в задачі із мішаними обмеженнями необхідно взяти рівняння з додатним вільним членом $(\beta_i > 0)$. Нерівності зі знаком „≥” ділять на такі числа, щоб після ділення вільні члени були менші за $\beta_i$. Після цього переходять до обмежень рівнянь і віднімають їх послідовно від вибраного рівняння. Всі штучні невідомі у здобутих рівняннях матимуть коефіцієнт +1 і додатні плани. Розглянемо приклад мішаної системи обмежень.

**Приклад 4.3.**

$-x_1 + 3x_2 \le 6$,

$x_1 + x_2 \ge 4$,

$2x_1 - x_2 = 4$,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

В першу нерівність введемо додаткову змінну $x_3$, а другу нерівність поділимо на 2 і додамо додаткову змінну $x_4$ з коефіцієнтом $-1$:

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$,

$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_4 = 2$,

$2x_1 - x_2 = 4$,

$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3,4)$.

Віднімемо від третього рівняння друге і запишемо результат замість другого рівняння:

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$,

$\frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + x_4 = 2$,

$2x_1 - x_2 = 4$,

$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3,4)$.

Тепер для вибору кінцевого базису досить лише ввести штучну змінну $y_1$ для третього рівняння:

$$-x_1+3x_2+x_3=6,$$

$$\frac{3}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2+x_4=2,$$

$$2x_1-x_2+y_1=4,$$

$$x_j\geq 0\ \ (j=1,2,3,4),\ \ y_1\geq 0.$$

Розглянемо алгебру методу штучного базису. Нехай основна задача лінійного програмування з обмеженнями рівностями

$$
\begin{aligned}
&z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to opt,\\
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\\
&x_j\geq 0\ \ (j=1,2,\ldots,n)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

записана так, що всі вільні члени $b_i\geq 0\ \ (i=1,2,\ldots,m)$. Цього завжди можна досягти, помноживши, якщо це треба, рівняння з від’ємним вільним членом на (–1).

Щоб дістати одиничну матрицю при базисних невідомих, формально до лівої частини кожного рівняння додаємо по одній штучній змінній $y_i\geq 0\ \ (i=1,2,\ldots,m)$. В результаті система обмежень набуває вигляду

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+y_1=b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+y_2=b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+y_m=b_m,\\
&x_j\geq 0\ \ (j=1,2,\ldots,n),\ \ y_i\geq 0\ \ (i=1,2,\ldots,m).
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

До неї додаємо штучну форму

$$f=y_1+y_2+\ldots+y_m\to\min, \tag{4.13}$$

яка залежить тільки від штучних змінних.

Задача (4.12), (4.13) є задачею лінійного програмування, яка записана у майже канонічній формі відносно базисних змінних $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Залишається у формі (4.13) із системи обмежень (4.12) виразити штучні змінні $y_1, y_2, \ldots, y_m$ через вільні невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Справедливим є такий критерій сумісності системи обмежень (4.11) в області невід’ємних значень.

**Теорема 4.2. Для того, щоб система обмежень (4.11) була сумісною в області невід’ємних значень, необхідно і достатньо, щоб на розв’язках (4.12)**

$$f_{\min} = 0.$$

*Необхідність.* Нехай система обмежень (4.11) має допустимий розв’язок $\vec{X}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$. Побудуємо розширену систему обмежень і розглянемо розв’язок задачі (4.12), (4.13):

$$\vec{Y}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\right).$$

Оскільки $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, m)$, то $y_i^* = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, m)$ і $f\left(\vec{Y}^*\right) = 0$.

В силу невід’ємності штучних змінних завжди $f \geq 0$, тому розв’язок $\vec{Y}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0, 0, \ldots, 0\right)$ є оптимальним для задачі (4.12), (4.13) і $f_{\min} = 0$.

*Достатність.* Нехай $\vec{Y}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\right)$ – розв’язок задачі (4.12), (4.13) і $f\left(\vec{Y}^*\right) = f_{\min} = 0$. Тоді $y_1^* + y_2^* + \ldots + y_m^* = 0$. Але сума невід’ємних чисел дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли кожне з них є нулем. Звідси, $y_1^* = y_2^* = \ldots = y_m^* = 0$. Отже, $\vec{Y}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0, 0, \ldots, 0\right)$ і система обмежень (4.12) збігається із системою обмежень (4.11), для якої розв’язок $\vec{X}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ є допустимим.

З теореми 4.2 випливає такий наслідок.

*Наслідок. Якщо оптимальний план задачі (4.12), (4.13) містить хоча б одну штучну змінну* $y_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, m)$, *то вихідна задача (4.11) не* *має розв'язку, оскільки вона не є сумісною в області невід'ємних значень.*

Теорема 4.2 дає практично, крім критерію існування допустимого плану, і метод його відшукання. Зазвичай, знайдений допустимий план є завжди опорним.

Розглянемо на прикладі методику пошуку опорного плану за методом штучного базису.

---

**Приклад 4.4.**

$z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 \to \min$,

$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 6$,

$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10$,

$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \le 14$,

$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, 3, 4)$.

Цілком зрозуміло, що в цьому випадку слід ввести лише дві штучні змінні $y_1 \ge 0$ та $y_2 \ge 0$ відповідно в перше і друге обмеження, оскільки третьою базисною змінною буде додаткова змінна $x_5 \ge 0$, що вводиться в третє обмеження. Отже, М-задача буде такою:

$z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 \to \min$,

$x_1 + 2x_2 + 3x_4 + y_1 = 6$,

$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + y_2 = 10$,

$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 14$,

$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5) \ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$.

Введемо штучну форму

$$f = y_1 + y_2 = 16 - (5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4)$$

і запишемо задачу в початкову симплексну таблицю.

Зробимо декілька зауважень щодо заповнення симплексної таблиці.

*Зауваження 1.* Щоб знайти опорний план, треба перевести штучні невідомі з базисних у вільні. Оскільки, після переходу у вільні, штучна невідома нас вже не буде цікавити, то відповідні стовпчики таблиці можна не заповнювати.

*Зауваження 2.* Нульовий рядок заповнюємо за цільовою функцією, а останній рядок – за штучною формою. Останній можна дістати формальним додаванням чисел відповідних стовпчиків рівнянь, які містять штучні змінні.

*Зауваження 3.* Методом штучного базису можна окремо (без цільової функції) досліджувати систему обмежень на сумісність в області невід'ємних значень. Це доцільно робити в тих випадках, коли є деякі ознаки того, що система обмежень не може мати допустимих планів.

Результати обчислень наведені в таблиці:

| № ітер. | № ряд. | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $y_1$ | $y_2$ | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 0 | $z$ | 0 | –2 | 1 | –1 | 7 | 0 | 0 | 0 | – |
| | 1 | $y_1$ | 6 | 1 | 2 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| | 2 | $y_2$ | 10 | $\boxed{4}$ | –1 | 1 | –1 | 0 | 0 | 1 | 5/2 |
| | 3 | $x_5$ | 14 | –1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | – |
| | | $f$ | 16 | 5 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | – |
| II | 0 | $z$ | 5 | 0 | 1/2 | –1/2 | 13/2 | 0 | 0 | | – |
| | 1 | $y_1$ | 7/2 | 0 | 9/4 | –1/4 | $\boxed{13/4}$ | 0 | 1 | | 14/13 |
| | 2 | $x_1$ | 5/2 | 1 | –1/4 | 1/4 | –1/4 | 0 | 0 | | ∞ |
| | 3 | $x_5$ | 33/2 | 0 | 11/4 | 9/4 | 3/4 | 1 | 0 | | 22 |
| | | $f$ | 7/2 | 0 | 9/4 | –1/4 | 13/4 | 0 | 0 | | – |
| III | 0 | $z$ | –2 | 0 | –4 | 0 | 0 | 0 | | | |
| | 1 | $x_4$ | 14/13 | 0 | 9/13 | -1/13 | 1 | 0 | | | |
| | 2 | $x_1$ | 36/13 | 1 | -1/13 | 3/13 | 0 | 0 | | | |
| | 3 | $x_5$ | 204/13 | 0 | 2 | 30/13 | 0 | 1 | | | |
| | | $f$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |

В рядку штучної форми $f$ першої ітерації максимальне число 5 стоїть у „$x_1$", тому слід ввести в базис змінну $x_1$, а з базису згідно з найменшим симплексним співвідношенням $\Delta$ вивести $y_2$.

На другій ітерації необхідно вивести з базису штучну змінну $y_1$, а ввести $x_4$, тому що найбільше число 13/4 рядка штучної форми $f$ знаходиться у відповідному стовпчику.

Після виключення штучних змінних з базису на третій ітерації отримали опорний план, який одночасно є оптимальним, тому що в нульовому рядку відсутні додатні числа. Отже оптимальний план задачі

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{14}{13},\ z_{\min} = -2.$$

---

Зрозуміло, що частіше після виведення штучних змінних із базису знаходиться опорний план, який не є оптимальним. Тоді продовжують пошук оптимального розв'язку за звичайними симплексними таблицями. Розглянемо приклад.

---

**Приклад 4.5.** Нехай задано задачу:

$$z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 18,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 16,$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,3,4).$$

Вводимо штучні змінні $y_1$ і $y_2$:

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + y_1 = 18,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + y_2 = 16,$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,3,4),\ \ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$$

та штучну форму:

$$f = y_1 + y_2 = 34 - (7x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4).$$

Симплексну таблицю можна заповнювати і без стовпчиків штучних змінних (це не стосується додаткових змінних).

| № ітерації | № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 0 | $z$ | 0 | –2 | 1 | –3 | 1 | – |
| | 1 | $y_1$ | 18 | $\boxed{4}$ | –2 | 1 | 3 | 9/2 |
| | 2 | $y_2$ | 16 | 3 | 1 | 2 | 1 | 16/3 |
| | 3 | $f$ | 34 | 7 | –1 | 3 | 4 | – |
| II | 0 | $z$ | 9 | 0 | 0 | –5/2 | 5/2 | – |
| | 1 | $x$ | 9/2 | 1 | –1/2 | 1/4 | 3/4 | ∞ |
| | 2 | $y_2$ | 5/2 | 0 | $\boxed{5/2}$ | 5/4 | –5/4 | 1 |
| | 3 | $f$ | 5/2 | 0 | 5/2 | 5/4 | –5/4 | – |
| III | 0 | $z$ | 9 | 0 | 0 | –5/2 | 5/2 | – |
| | 1 | $x_1$ | 5 | 1 | 0 | 1/2 | 1/2 | 10 |
| | 2 | $x_2$ | 1 | 0 | 1 | $\boxed{1/2}$ | –1/2 | 2 |
| | 3 | $f$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | – |
| IV | 0 | $z$ | 14 | 0 | 5 | 0 | 0 | |
| | 1 | $x_1$ | 4 | 1 | –1 | 0 | 1 | |
| | 2 | $x_3$ | 2 | 0 | 2 | 1 | –1 | |

У третьому рядку третьої ітерації таблиці немає вже додатних чисел, тому план $\vec{X} = (5,1,0,0)$ – опорний план для вихідної задачі, який не буде оптимальним оскільки в нульовому рядку є від’ємне число $-5/2$. Вибираючи ключовий елемент, приходимо до оптимального плану:

$$\vec{X}_{opt} = (4,0,2,0),\ z_{\max} = 14.$$

## 4.6. Альтернативний оптимум та зациклення в задачах лінійного програмування

При розв’язуванні задач лінійного програмування симплексним методом може статися, що в останній таблиці у нульовому рядку (рядок цільової функції) виконані критерії оптимальності розв’язку, але один чи декілька коефіцієнтів при вільних змінних дорівнюють нулю тобто відсутня одна або декілька вільних змінних у виразі для цільової функції. Тоді, прийнявши у якості ключового стовпчика стовпчик, де $\gamma_j = 0$ для вільної змінної, і знайшовши новий оптимальний розв'язок, помітимо, що значення цільової функції при цьому не зміниться (цільова функція не залежить від цієї вільної змінної). Кажуть, що у цьому випадку задача має альтернативний оптимум.

*Критерієм альтернативного оптимуму при розв'язуванні задач симплексним методом є рівність нулю хоча б одного коефіцієнта при вільній змінній в рядку цільової функції (нульовому рядку)* $\gamma_j = 0$.

Якщо тільки один коефіцієнт вільної змінної в рядку цільової функції дорівнює нулю, то розв'язок знаходиться за формулою

$\vec{X}_{opt} = t\vec{X}_{opt1} + (1-t)\vec{X}_{opt2}$, де $0 \le t \le 1$.

Якщо два і більше коефіцієнти $\gamma_j$, наприклад $s$, вільних змінних дорівнюють нулю, то оптимальний розв'язок визначається за формулою

$\vec{X}_{opt} = \sum_{i=1}^{s} t_i \vec{X}_i$, де $\sum_{i=1}^{s} t_i = 1,\ t_i \ge 0$.

В задачах, які мають альтернативний оптимум, виникає можливість включення в її модель інших критеріїв ефективності.

---

**Приклад 4.6.** Дана задача лінійного програмування

$z = 2x_2 - 4x_3 + 2x_5 \to \min$,

$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$,

$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$,

$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 5)$.

Задача лінійного програмування записана в канонічній формі з базисними змінними $x_1$, $x_4$. Складемо симплексну таблицю і знайдемо оптимальний розв'язок.

| № ітер. | № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 0 | $z$ | 0 | 0 | –2 | 4 | 0 | –2 | – |
| | 1 | $x_1$ | 7 | 1 | 3 | –1 | 0 | 2 | $\infty$ |
| | 2 | $x_4$ | 12 | 0 | –2 | $\boxed{4}$ | 1 | 0 | 3 |
| II | 0 | $z$ | –12 | 0 | 0 | 0 | –1 | –2 | – |
| | 1 | $x_1$ | 10 | 1 | $\boxed{5/2}$ | 0 | 1/4 | 2 | 4 |
| | 2 | $x_3$ | 3 | 0 | –1/2 | 1 | 1/4 | 0 | $\infty$ |
| III | 0 | $z$ | –12 | 0 | 0 | 0 | –1 | –2 | |
| | 1 | $x_2$ | 4 | 2/5 | 1 | 0 | 1/10 | 4/5 | |
| | 2 | $x_3$ | 5 | 1/5 | 0 | 1 | 3/10 | 2/5 | |

В нульовому рядку першої ітерації присутнє одне додатне число 4. Ключовий елемент вибираємо у стовпчику $x_3$. На другій ітерації отримали оптимальний розв’язок $\vec{X}_{opt1} = (10, 0, 3, 0, 0)$, $z_{\min} = -12$. Оскільки в нульовому рядку другої ітерації коефіцієнт при $x_2$ дорівнює нулю (у виразі для цільової функції відсутня вільна змінна $x_2$), то задача має альтернативний оптимум. Ще один оптимальний розв’язок можна знайти, якщо в базис ввести вільну змінну $x_2$ замість $x_1$ (враховуючи оціночне відношення $\Delta$). Отримуємо $\vec{X}_{opt2} = (0, 4, 5, 0, 0)$, $z_{\min} = -12$. Тоді множина оптимальних розв’язків задачі:

$$x_1 = 10t + (1-t)0 = 10t,$$

$$x_2 = 0t + (1-t)4 = 4 - 4t,$$

$$x_3 = 3t + (1-t)5 = 5 - 2t,$$

$$x_4 = 0t + (1-t)0 = 0,$$

$$x_5 = 0t + (1-t)0 = 0,$$

$$\vec{X}_{opt} = (10t, 4-4t, 5-2t, 0, 0).$$

Надаючи $t$ значення з проміжку $[0;1]$, отримуємо різні оптимальні плани, для яких $z_{\min} = -12$.

---

На практиці може трапитись випадок, коли при виборі ключового елемента є декілька однакових найменших відношень $\Delta_s = \dfrac{\beta_s}{\alpha_{sj}}$. Тоді на наступній ітерації деякі базисні змінні опорного плану будуть дорівнювати нулю. Це призводить до того, що наступні ітерації можуть не змінювати цільової функції.

*Опорний план, в якому хоча б одна базисна компонента дорівнює нулю, будемо називати виродженим.*

*Задача лінійного програмування, яка має принаймні один вироджений опорний план, називається виродженою.*

Але й у випадку виродженого опорного плану можна підібрати такий ключовий елемент, що через деякий час значення цільової функції почне змінюватись в необхідному напрямку.

---

**Приклад 4.7.** Розв'язати симплексним методом задачу

$z = 2x_1 - x_2 \to \max$,

$x_1 - x_2 \le 2$,

$3x_1 - 2x_2 \le 6$,

$6x_1 - 4x_2 \le 14$,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Після введення додаткових змінних $x_3, x_4, x_5$ отримуємо

$x_1 - x_2 + x_3 = 2$,

$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$,

$6x_1 - 4x_2 + x_5 = 14$,

$x_j \ge 0\ \ (j = 1, 2, \ldots, 5)$.

Складемо початкову симплексну таблицю і на другій ітерації отримуємо вироджений базисний розв’язок $\vec{X}_2 = (2,0,0,0,2)$, в якому базисна змінна $x_4 = 0$.

| № ітер. | № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 0 | $z$ | 0 | –2 | 1 | 0 | 0 | 0 | – |
| | 1 | $x_3$ | 2 | $\boxed{1}$ | –1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| | 2 | $x_4$ | 6 | 3 | –2 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| | 3 | $x_5$ | 14 | 6 | –4 | 0 | 0 | 1 | 7/3 |
| II | 0 | $z$ | 4 | 0 | –1 | 2 | 0 | 0 | – |
| | 1 | $x_1$ | 2 | 1 | –1 | 1 | 0 | 0 | ∞ |
| | 2 | $x_4$ | 0 | 0 | $\boxed{1}$ | –3 | 1 | 0 | 0 |
| | 3 | $x_5$ | 2 | 0 | 2 | –6 | 0 | 1 | 1 |
| III | 0 | $z$ | 4 | 0 | 0 | –1 | 1 | 0 | |
| | 1 | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | –2 | 1 | 0 | |
| | 2 | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | –3 | 1 | 0 | |
| | 3 | $x_5$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | |

Цільова функція, виражена через вільні змінні має вигляд $z = 4 + x_2 - 2x_3$. Якщо ввести змінну $x_2$ в базис, то на третій ітерації не отримаємо зміни цільової функції $\Delta z = 0$. $\vec{X}_3 = (2,0,0,0,2)$ – базисний розв’язок, який також вироджений. Покомпонентно він співпадає з $\vec{X}_2$, але формально відрізняється набором базисних змінних. Вираз цільової функції через вільні має вигляд: $z = 4 + x_3 - x_4$. (Розв’язок пропонуємо продовжити читачам самостійно).

---

Виродженість базису практично не впливає на число ітерацій, потрібних для обчислення оптимального плану. Досвід показує, що число ітерацій, потрібних для відшукання кінцевого результату, міститься в межах: $1{,}5m \le k \le 3m$, де $m$ – число основних обмежень задачі.

Виродження базису, яке отримане при оптимальному плані, може привести до альтернативного оптимуму навіть при ненульових коефіцієнтах всіх вільних змінних в цільовій функції.

Таким чином, строга монотонність симплексного алгоритму має місце лише у випадку невиродженості всіх опорних планів, одержуваних при кожній ітерації алгоритму. Вироджений план являється причиною того, що виникає теоретична можливість зациклення алгоритму, коли після певного числа ітерацій дістають план задачі, який вже був на початку циклу. Очевидно, дальші ітерації, проведені аналогічно, приведуть до повторення циклу. Отже, циклу можна було б уникнути, запам'ятовуючи опорні плани, що утворили його, і не повертаючись до них. Проте є більш надійний і простий метод усунення зациклення, так званий $\varepsilon$-метод, що випливає з геометричних міркувань.

Справді, виродженому опорному плану відповідає вершина многокутника розв'язків, утворювана більш ніж $n$ гіперплощинами, інакше кажучи, одна вершина відповідає кільком виродженим планам, що означає злиття кількох вершин многокутника в одну. Ідея $\varepsilon$-методу усунення зациклення полягає в роз'єднанні злитих вершин. Для цього досить, очевидно, ввести замість нулів у відповідні рівняння вільні члени, які не дорівнюють нулю, однак зробити це так, щоб не було знову кількох однакових мінімальних відношень при наступному кроці. Таким чином, замість вихідної матимемо змінену задачу. Проте легко показати, що діставши оптимальний план зміненої задачі й покладаючи, що введені величини дорівнюють нулю, матимемо оптимальний розв'язок вихідної задачі.

На практиці введені величини є малими – це поліноми довільно взятої малої (близької до нуля) додатної величини ε. Коефіцієнтами поліномів беруть коефіцієнти при змінних (базисних і вільних) відповідного рівняння, а степенями $\varepsilon$ – номери цих невідомих, тобто для $i$-го рівняння маємо поліном

$$P_i(\varepsilon)=\varepsilon^i+\alpha_{i1}\varepsilon^{m+1}+\alpha_{i2}\varepsilon^{m+2}+\ldots+\alpha_{ik}\varepsilon^{m+k}\quad (i=1,2,\ldots,m).$$

Цілком зрозуміло, що при всяких $\alpha_{ij}$ можна вибрати ε настільки малим, що завжди $P_i(\varepsilon)\geq 0$, бо доданки з степенями $\varepsilon$, вищими від $i$-го, будуть вищого порядку малості порівняно з першим $\varepsilon^i$. Внаслідок цього всі утворені поліноми різнитимуться за величиною. Покладаючи в знайденому оптимальному плані $\varepsilon=0$, матимемо потрібний результат.

Щоб уникнути зациклення необхідно поліноми $P_i(\varepsilon)$ додати до вільних членів, в результаті чого матимемо

$$\beta_i(\varepsilon)=\beta_i+P_i(\varepsilon).$$

Пропонуємо читачам переконатись, що зациклення буде мати місце в прикладі

$$z=x_3-x_4+x_5-x_6\to\max,$$

$$x_1+x_3-2x_4-3x_5+4x_6=0,$$

$$x_2+4x_3-3x_4-2x_5+x_6=0,$$

$$x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=1,$$

$$x_j\geq 0\ \ (j=1,2,\ldots,7),$$

якщо послідовно вводити в базис змінні $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, $x_1$, $x_2$ і розміщувати відповідно на позиціях: 1-й, 2-й, 1-й, 2-й, 1-й, 2-й; пропонуємо також розв’язати цей приклад, вводячи величини $\beta_i(\varepsilon)$ $(i=1,2,3)$.

Нарешті зауважимо, що на практиці зациклення практично не трапляється. Усі відомі приклади його побудовані штучно. Проте в теоретичному плані розгляд цього випадку має певний сенс.

## Питання для самоконтролю

1. Для розв'язання яких задач лінійного програмування застосовується симплексний метод?
2. Які основні етапи знаходження розв'язків задачі лінійного програмування?
3. Який план задачі лінійного програмування називається опорним?
4. Яка система основних обмежень задачі лінійного програмування називається сумісною в області невід'ємних значень?
5. В якому випадку система обмежень несумісна в області невід'ємних значень?
6. Як обирається ключовий елемент при знаходженні початкового опорного плану за допомогою симплексних таблиць?
7. Правила знаходження опорного плану.
8. Ознаки оптимальності задач лінійного програмування на максимум та мінімум.
9. Яка задача лінійного програмування не має розв'язку?
10. Алгоритм роботи за симплексними таблицями.
11. Відмінність штучних та додаткових змінних.
12. Критерій сумісності системи обмежень у методі штучного базису.
13. Який критерій альтернативного оптимуму?
14. Яка задача лінійного програмування називається виродженою?
15. Ідея $\varepsilon$-методу усунення зациклення.

## Вправи

Систему обмежень в задачах 4.1 – 4.3 методом штучного базису привести до одиничного базису:

4.1. $2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1,$

$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -1,$

$-3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 11.$

4.2. $7x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 21,$

$x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 11,$

$3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6.$

4.3. $-x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 9,$

$3x_1 + x_3 - x_4 = -3.$

Задачі 4.4 – 4.24 розв'язати симплексним методом в області невід'ємних значень $(x_j \geq 0)$:

4.4. $z = 40x_1 + 20x_3 \to \max,$

$x_1 + x_2 + x_5 = 1,$

$x_3 + x_4 + x_6 = 1,$

$7x_1 - 12x_2 + 4x_3 - 20x_4 = 0.$

4.5. $z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to \min,$

$x_1 + x_4 + 6x_6 = 9,$

$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2,$

$x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6.$

4.6. $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15,$

$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20,$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10.$

4.7. $z = 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \to \min,$

$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 13$,

$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10$,

$x_1 \leq \frac{5}{2}$.

4.8. $z = x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \min$,

$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 40$,

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 80$,

$3x_2 + 3x_3 - 1{,}5x_4 \geq 36$.

4.9. $z = -x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$,

$-x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6$,

$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$,

$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$.

4.10. $z = x_1 + 10x_2 - x_3 + 5x_4 \to \max$,

$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1$,

$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2$,

$x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5$.

4.11. $z = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 + 4x_5 \to \min$,

$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5$,

$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 8$,

$x_1 + 4x_2 + x_4 = 1$.

4.12. $z = x_1 + 2x_2 \to \max$,

$2x_1 + 3x_2 \leq 6$,

$2x_1 + x_2 \leq 4$,

$x_1 \leq 1$,

$x_1 - x_2 \geq -1$,

$2x_1 + x_2 \geq 1$.

4.13. $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$,

$x_1 - x_2 \geq -2$,

$5x_1 + 3x_2 \leq 15$,

$x_2 \leq 2{,}5$,

$x_1 - 2x_2 \leq 2$,

$2x_1 - x_2 \geq -2$.

4.14. $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max$,

$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$,

$x_1 - x_2 + x_4 = 1$,

$x_1 + x_2 + x_5 = 2$.

4.15. $z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$,

$-x_4 - 2x_6 = 5$,

$x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3$,

$x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5$.

4.16. $z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \to \min$,

$x_1 + x_4 + 6x_5 = 9$,

$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 2$,

$x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 6$.

4.17. $z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 34x_4 \to \min$,

$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$,

$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$,

$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6$.

4.18. $z = x_4 - x_5 \to \max$,

$-2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 \geq 0$,

$2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 0$,

$x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \geq 0$,

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

4.19. $z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min$,

$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$,

$2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6$,

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$.

4.20. $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min$,

$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$,

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$.

4.21. $z = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \to \min$,

$x_1 - 2x_2 + x_4 = -3$,

$x_3 - 2x_4 = 2$,

$3x_2 - x_4 + x_5 \le 5$,

$x_2 + x_5 \ge 3$.

4.22. $z = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$,

$x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5$,

$x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9$.

4.23. $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$,

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10$,

$2x_1 + x_2 = 3$,

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$.

4.24. $z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$,

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 9$,

$2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 8$,

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 7$.

4.25. Механічний завод при виготовлені двох типів деталей використовує токарне, фрезерне і зварювальне обладнання. При цьому обробку кожної деталі можна вести двома різними технологічними способами. Необхідні вихідні дані наведені у таблиці.

| Обладнання | Деталі | | | | Корисний фонд часу, станко–год |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | 2 | | |
| | Технологічні способи | | | | |
| | 1 | 2 | 1 | 2 | |
| Фрезерне | 2 | 2 | 3 | 0 | 20 |
| Токарне | 3 | 1 | 1 | 2 | 37 |
| Зварювальне | 0 | 1 | 1 | 4 | 30 |
| Прибуток, умов. грош. од. | 11 | 6 | 9 | 6 | |

Скласти оптимальний план завантаження обладнання, який забезпечував би заводу максимальний прибуток.

4.26. З двох сортів бензину утворюють для певних потреб дві суміші: А і В. Суміш А містить 60% бензину 1-го сорту і 40% 2-го сорту; суміш В містить 80% бензину 1-го сорту і 20% 2-го сорту. 1 кг суміші А коштує 2 грн., 1 кг суміші В – 2 грн. 40 коп. Бензину 1-го сорту є в наявності 50 т і 2-го сорту 30 т. Скільки треба виготовити окремо суміші А і В, щоб прибуток від реалізації був максимальним?

4.27. Для відгодівлі групи тварин використовують чотири види кормів: $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$. У таблиці показано кількість умовних вагових одиниць поживних речовин $A_1$, $A_2$, $A_3$ в 1 кг кожного виду кормів, добову потребу кожної групи тварин у поживних речовинах $A_1$, $A_2$, $A_3$ (в умовних вагових одиницях) і вартість 1 кг кормів (в умовних грошових одиницях).

| Поживні речовини | Види кормів | | | | Добова потреба в поживних речовинах |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 1 | 2 | 2 | 1 | 64 |
| $A_2$ | 0 | 3 | 1 | 1 | 39 |
| $A_3$ | 2 | 1 | 0 | 3 | 35 |
| Вартість 1 кг кормів | 11 | 6 | 9 | 6 | |

Визначити, скільки треба купувати на добу кожного виду корму $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, щоб задовольнити потребу в поживних речовинах і щоб витрати на корми були мінімальними?

4.28. На підприємстві є три види основного устаткування $A_1$, $A_2$, $A_3$, на якому можна виготовляти вироби чотирьох видів: $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$. Збут цих виробів необмежений, підприємство само планує асортимент і величину випуску продукції, сировину також можна придбати в потрібній кількості (вона не обмежує виробництво). Можливості виробництва лімітує лише фонд часу використання основного устаткування, який не може бути перевищений для кожного його виду. Відомо фонд часу використання кожного виду устаткування (в годинах), потребу в часі його використання для кожного виробу і величину прибутку (в грн.), яку одержує підприємство за одиницю кожного виробу. Ці дані розміщено в таблиці:

| Назва устаткування | Витрати часу на одиницю виробу | | | | Місячний фонд часу |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 1 | 0 | 6 | 3 | 120 |
| $A_2$ | 2 | 3 | 2 | 2 | 230 |
| $A_3$ | 2 | 3 | 0 | 1 | 220 |
| Прибуток за одиницю продукції | 45 | 50 | 20 | 60 | |

Визначити, скільки треба випускати щомісяця виробів кожного виду, щоб мати максимальний прибуток.

4.29. Завод додатково освоїв випуск продукції чотирьох видів $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$. Для випуску цієї продукції потрібна сировина чотирьох видів: $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, яку завод може щомісяця одержувати в обмеженій кількості. Кількість сировини кожного виду, яка потрібна для виготовлення кожного виду асортименту продукції, ціна кожного виду асортименту продукції, а також щомісячне надходження сировини для виготовлення продукції подано в таблиці:

| Види сировини | Щомісячне надходження сировини | Витрати сировини на одиницю кожного виробу | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
| $A_1$ | 1260 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| $A_2$ | 900 | 2 | 2 | 0 | 6 |
| $A_3$ | 530 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| $A_4$ | 210 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| Прибуток від реалізації одного виробу | | 8 | 10 | 12 | 18 |

Визначити, який асортимент продукції і в якій кількості повинен випускати завод, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

4.30. Для нормального проходження технологічного процесу на одному з цехів хімічного заводу потрібні хімічні речовини, місячна норма яких повинна бути не менша, відповідно, 48, 60 і 80 вагових одиниць. Ці речовини містяться в сумішах $B_1$, $B_2$, $B_3$. Вміст кожної з речовин $A_1$, $A_2$, $A_3$ в кожній із сумішей $B_1$, $B_2$, $B_3$, а також ціну (в грн.) одного літру суміші подано в таблиці:

| Види хімічних речовин | Мінімальна потреба | Вміст хімічних речовин в сумішах у вагових одиницях(1 *л* суміші) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
| $A_1$ | 48 | 1 | 0 | 2 |
| $A_2$ | 60 | 2 | 3 | 0 |
| $A_3$ | 80 | 0 | 2 | 4 |
| Ціна суміші | | 2 | 3 | 4 |

Яку кількість треба щомісяця купувати суміші $B_1$, $B_2$, $B_3$, щоб задовольнити потребу цеху хімічного заводу в хімічних речовинах $A_1$, $A_2$, $A_3$ і щоб витрати на ці закупки були мінімальними?

4.31. Торгівельна фірма для продажу товарів трьох видів використовує ресурси: час і площа торгівельних залів. Витрати ресурсів на продаж однієї партії товарів кожного виду подано в таблиці:

| Ресурси | Вид товару | | | Об'єм ресурсів |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| Час, люд.-год. | 0,5 | 0,7 | 0,6 | 370 |
| Площа, $м^2$ | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 90 |

Прибуток, який одержується від реалізації однієї партії товарів 1-го виду – 5 у.г.о., 2-го виду – 8 у.г.о., 3-го виду – 6 у.г.о. Визначити оптимальну структуру товарообігу, яка забезпечувала б фірмі максимальний прибуток.

4.32. Фірма випускає чотири вироби, які користуються попитом, причому місячна програма випуску складає 10 виробів типу 1 та 3, 200 виробів типу 2 і 120 виробів типу 4. Норми витрат сировини на одиницю різних типів виробів наведено в таблиці:

| Вид сировини | Норми витрат на один виріб | | | | Запаси сировини |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 1 | 5 | 1 | 0 | 2 | 1000 |
| 2 | 4 | 2 | 2 | 1 | 600 |
| 3 | 1 | 0 | 2 | 1 | 150 |

Прибуток від реалізації виробів типу 1 дорівнює 6 у.г.о., виробів 2 типу – 2 у.г.о., виробів типу 3 – 2,5 у.г.о. і виробів типу 4 – 4 у.г.о. Визначити, чи є місячна програма випуску виробів оптимальною, і якщо ні, то визначити оптимальну місячну програму і додатковий прибуток, який фірма може при цьому отримати.

4.33. Металургійний завод із металів $A_1$, $A_2$, $A_3$ може випускати сплави $B_1$, $B_2$, $B_3$. На протязі планового періоду завод повинен освоїти не менше 640 т металу $A_1$ і 800 т металу $A_2$, при цьому металу $A_3$ може бути витрачено не більше 860 т. Визначити мінімальні витрати, якщо дані про норми витрат і собівартість подані в таблиці:

| Вид металів | Технологічні норми витрат на умов. од. сплаву | | | Наявність метала у заводу |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | |
| $A_1$ | 1,0 | 4,3 | 2,6 | 640 |
| $A_2$ | 5,0 | 1,5 | 3,0 | 800 |
| $A_3$ | 3,0 | 3,9 | 4,3 | 860 |
| Собівартість 1 т сплаву | 18 | 15 | 15 | |

4.34. Тканина трьох артикулів виготовляється на ткацьких станках двох типів з різною продуктивністю. Для виготовлення тканини використовуються пряжа і барвники. В таблиці вказані потужності станків в тисячах станко-годин, ресурси пряжі і барвників в 1000 кг, продуктивність станків в метрах за годину, норми витрат пряжі та барвників в кг на 1000 м і ціна 1м тканини:

| Вид ресурсів | Об'єм ресурсів | Норми витрат | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| Станки 1-го типу | 30 | 20 | 10 | 25 |
| Станки 2-го типу | 45 | 8 | 20 | 10 |
| Пряжа | 30 | 120 | 180 | 210 |
| Барвники | 1 | 10 | 5 | 8 |
| Ціна, у.г.о. | | 15 | 15 | 20 |

По цим вихідним даним розв'язати наступні задачі:

а) визначити оптимальний асортимент, який максимізує товарну продукцію підприємства;

б) прийнявши умову, що кількість тканин трьох артикулів знаходиться у відношенні 2:1:3, визначити, яку максимальну кількість комплектів тканини може випускати підприємство;

в) визначити оптимальний асортимент, який максимізує прибуток підприємства, якщо ціна 1 м тканини складає 8, 5 і 15 у.г.о. відповідно;

г) розв'язати задачу пункту а) при умові, що станки 1-го типу тканину першого артикулу не виробляють.

# РОЗДІЛ 5
# ДВОЇСТІСТЬ І АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ

## 5.1. Визначення двоїстої (спряженої) задачі

Кожній задачі лінійного програмування відповідає інша задача, яка називається двоїстою або спряженою по відношенню до вихідної. Вихідну задачу лінійного програмування будемо називати *прямою*. *Двоїста задача* – це задача, яка формулюється за допомогою певних правил безпосередньо з прямої задачі. Теорія двоїстості виявилась корисною для проведення якісних досліджень задач лінійного програмування.

При викладанні теорії двоїстості часто розглядають формулювання двоїстої задачі в залежності від різних видів прямої задачі, які визначаються типами основних обмежень, знаками змінних (невід'ємні або без обмежень по знаку) і типом оптимізації (максимізація або мінімізація цільової функції). Така „прив'язка" двоїстої задачі до вихідної не завжди виправдана. Наведемо єдине формулювання двоїстої задачі, яке можна застосовувати для всіх видів прямої задачі. В основу такого формулювання покладена перша стандартна форма прямої задачі. Нагадаємо, що задача лінійного програмування в першій стандартній формі записується так:

максимізувати або мінімізувати цільову функцію $z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad (i=1,2,\dots,m),$$

$$x_j \ge 0, \quad (j=1,2,\dots,n).$$

В склад *n* змінних $x_j$ входять також додаткові змінні.

Стандартна форма задачі лінійного програмування приводить до її канонічної форми, яка, в свою чергу, є основою початкової таблиці симплексного методу. Тому, як буде показано в п. 5.2, розв’язок двоїстої задачі можна отримати безпосередньо з симплексної таблиці, яка відповідає розв’язку прямої задачі. Таким чином, визначивши двоїсту задачу на основі першої стандартної форми прямої задачі, після обчислень симплексного методу, автоматично отримується розв’язок двоїстої задачі.

Змінні і обмеження двоїстої задачі формуються шляхом симетричних структурних перетворень прямої задачі за наступними правилами.

1. Кожному з $m$ обмежень прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі.
2. Кожній з $n$ змінних прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі.
3. Коефіцієнти при якій-небудь змінній в обмеженнях прямої задачі стають коефіцієнтами обмеження двоїстої задачі, яке відповідає цій змінній, а права частина обмеження, яке формується, дорівнює коефіцієнту при цій змінній у виразі цільової функції. Тобто матриці коефіцієнтів при змінних прямої і двоїстої задач є транспонованими одна до одної.
4. Коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі рівні правим частинам обмежень прямої задачі.

Графічно ці правила подані у табл. 5.1.

*Таблиця 5.1*

<table>
<tr><td rowspan="3">Змінні двоїстої задачі</td><td colspan="6">Змінні прямої задачі</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>$x_1$</td><td>$x_2$</td><td>. . .</td><td>$x_j$</td><td>. . .</td><td>$x_n$</td></tr>
<tr><td>$c_1$</td><td>$c_2$</td><td>. . .</td><td>$c_j$</td><td>. . .</td><td>$c_n$</td></tr>
<tr><td>$y_1$</td><td>$a_{11}$</td><td>$a_{12}$</td><td>. . .</td><td>$a_{1j}$</td><td>. . .</td><td>$a_{1n}$</td><td>$b_1$</td></tr>
<tr><td>$y_2$</td><td>$a_{21}$</td><td>$a_{22}$</td><td>. . .</td><td>$a_{2j}$</td><td>. . .</td><td>$a_{2n}$</td><td>$b_2$</td></tr>
<tr><td>. . .</td><td>. . .</td><td>. . .</td><td>. . .</td><td>. . .</td><td>. . .</td><td>. . .</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>$y_m$</td><td>$a_{m1}$</td><td>$a_{m2}$</td><td>. . .</td><td>$a_{mj}$</td><td>. . .</td><td>$a_{mn}$</td><td>$b_m$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">$j$-е обмеження двоїстої задачі</td><td></td><td>Коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі</td></tr>
</table>

Правила, що визначають тип оптимізації і обмежень, а також знак змінних двоїстої задачі, приведені у табл. 5.2.

*Таблиця 5.2*

<table>
<tr><td rowspan="2">Цільова функція прямої задачі</td><td colspan="3">Двоїста задача</td></tr>
<tr><td>Цільова функція</td><td>Тип обмежень</td><td>Змінні</td></tr>
<tr><td>Максимізація<br>Мінімізація</td><td>Мінімізація<br>Максимізація</td><td>$\geq$<br>$\leq$</td><td>Без обмеження по знаку<br>Без обмеження по знаку</td></tr>
</table>

Наступні приклади ілюструють правила побудови двоїстої задачі.

**Приклад 5.1.**

<table>
<tr><td>Пряма задача</td><td>Пряма задача в стандартній формі</td><td>Двоїсті змінні</td></tr>
<tr><td>Максимізувати<br>$z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$<br>при обмеженнях<br>$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$,<br>$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$,<br>$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.</td><td>Максимізувати<br>$z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$<br>при обмеженнях<br>$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$,<br>$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$<br>$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.</td><td><br><br><br>$y_1$<br>$y_2$</td></tr>
</table>

*Двоїста задача*

Мінімізувати $w = 10y_1 + 8y_2$

при обмеженнях

$y_1 + 2y_2 \ge 5$,

$2y_1 - y_2 \ge 12$,

$y_1 + 3y_2 \ge 4$,

$$\left.\begin{array}{c} y_1 + 0y_2 \ge 0 \\ y_1, y_2 - \textit{без обмеження по знаку} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(y_1 \ge 0,\ y_2 - \textit{без обмеження по знаку}\right).$$

---

**Приклад 5.2.**

| Пряма задача | Пряма задача в стандартній формі | Двоїсті змінні |
|---|---|---|
| Мінімізувати<br>$z = 15x_1 + 12x_2$,<br>при обмеженнях<br>$x_1 + 2x_2 \ge 3$,<br>$2x_1 - 4x_2 \le 5$,<br>$x_1, x_2 \ge 0$. | Мінімізувати<br>$z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$<br>при обмеженнях<br>$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$,<br>$2x_1 - 4x_2 + x_4 = 5$,<br>$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$. | <br><br><br>$y_1$<br>$y_2$ |

*Двоїста задача*

Максимізувати $w = 3y_1 + 5y_2$

при обмеженнях

$y_1 + 2y_2 \le 15$,

$2y_1 - 4y_2 \le 12$,

$-y_1 \le 0$ $(\textit{або}\ y_1 \ge 0)$,

$y_2 \le 0$,

$y_1, y_2 - \textit{без обмеження по знаку}$ (зайва умова).

**Приклад 5.3.**

| Пряма задача | Пряма задача в стандартній формі | Двоїсті змінні |
|---|---|---|
| Максимізувати<br>$z = 5x_1 + 6x_2$<br>при обмеженнях<br>$x_1 + 2x_2 = 5$,<br>$-x_1 + 5x_2 \ge 3$,<br>$4x_1 + 7x_2 \le 8$,<br>$x_1 - \textit{без обмеження по знаку}$,<br>$x_2 \ge 0$. | Підстановка $x_1 = x_1'' - x_1'$ приводить до задачі:<br>Максимізувати $z = 5x_1'' - 5x_1' + 6x_2$<br>при обмеженнях<br>$x_1'' - x_1' + 2x_2 = 5$,<br>$-x_1'' + x_1' + 5x_2 - x_3 = 3$,<br>$4x_1'' - 4x_1' + 7x_2 + x_4 = 8$,<br>$x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4 \ge 0$. | <br><br><br><br>$y_1$<br>$y_2$<br>$y_3$ |

*Двоїста задача*

$$\text{Мінімізувати } w = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$$

при обмеженнях

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_2 + 4y_3 \ge 5 \\ -y_1 + y_2 - 4y_3 \ge -5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1 - y_2 + 4y_3 = 5,$$

$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \ge 6$,

$-y_2 \ge 0 \Rightarrow y_2 \le 0$,

$y_3 \ge 0$,

$y_1 - \textit{без обмеження по знаку}$,

$y_2, y_3 - \textit{без обмеження по знаку}$ (зайва умова).

Перше і друге обмеження двоїстої задачі замінені однією умовою у вигляді рівності. Тут діє наступне правило: змінній без обмеження по знаку прямої задачі відповідає обмеження у вигляді рівності двоїстої і, навпаки, обмеженню у вигляді рівності прямої задачі відповідає вільна змінна двоїстої задачі.

На закінчення наведемо правила побудови двоїстих задач (таблиця 5.3), які часто приводяться в літературі по дослідженню операцій і лінійному програмуванню. Можна показати (пропонуємо читачам зробити це самостійно), що ці правила є частинним випадком загальних правил, які приведені у табл. 5.2.

*Таблиця 5.3*

| Задача максимізації | | Задача мінімізації |
|---|---|---|
| Обмеження | | Змінні |
| $\geq$ | $\Leftrightarrow$ | $\leq 0$ |
| $\leq$ | $\Leftrightarrow$ | $\geq 0$ |
| = | $\Leftrightarrow$ | Без обмеження по знаку |
| Змінні | | Обмеження |
| $\geq 0$ | $\Leftrightarrow$ | $\geq$ |
| $\leq 0$ | $\Leftrightarrow$ | $\leq$ |
| Без обмеження по знаку | $\Leftrightarrow$ | = |

## 5.2. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ОПТИМАЛЬНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ ПРЯМОЇ І ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧ

Пряма і двоїста задачі тісно взаємозв'язані, так що оптимальний розв'язок однієї задачі можна отримати безпосередньо (без додаткових обчислень) з симплексної таблиці, яка представляє оптимальний розв'язок іншої. Це твердження основується на наступному співвідношенні.

**Співвідношення 1. Для будь-якої симплексної ітерації прямої або двоїстої задачі:**

$$\begin{pmatrix} \text{Коефіцієнт при } j-\text{й} \\ \text{змінній в } z-\text{му рядку} \\ \text{однієї задачі} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Різниця між лівою і правою} \\ \text{частинами } j-\text{го обмеження} \\ \text{іншої задачі} \end{pmatrix}.$$

Це співвідношення симетричне відносно прямої і двоїстої задач. Його можна використовувати для визначення оптимального розв'язку однієї задачі безпосередньо з симплексної таблиці, яка містить оптимальний розв'язок іншої. Дана обставина обумовлює можливість проведення обчислень саме по тій задачі (прямій або двоїстій), яка потребує менших обчислювальних ресурсів. Наприклад, якщо пряма задача має 100 змінних і 500 обмежень, то краще віддати перевагу знаходженню оптимального розв’язку двоїстої задачі, так як вона буде містити тільки 100 обмежень, тому що трудомісткість обчислень задачі лінійного програмування у більшій мірі залежить від кількості обмежень, ніж кількості змінних.

**Приклад 5.4.**

Розглянемо пряму і двоїсту задачі з прикладу 5.1, які для зручності зведені у наступну таблицю:

| Пряма задача | Двоїста задача |
| --- | --- |
| Максимізувати $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$<br>при обмеженнях<br>$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$,<br>$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$,<br>$x_1, x_2, x_3 \ge 0$. | Мінімізувати $w = 10y_1 + 8y_2$<br>при обмеженнях<br>$y_1 + 2y_2 \ge 5$,<br>$2y_1 - y_2 \ge 12$,<br>$y_1 + 3y_2 \ge 4$,<br>$y_1 \ge 0,\ y_2$ – *без обмеження по знак*<br>. |

В наступній таблиці представлені симплексні ітерації розв’язування прямої задачі.

| № ітер. | № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $u$ | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 0 | $z$ | 0 | –5 | –12 | –4 | 0 | 0 | – |
| | 1 | $x_4$ | 10 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| | 2 | $u$ | 8 | 2 | –1 | $\boxed{3}$ | 0 | 1 | 8/3 |
| | | $f$ | 8 | 2 | –1 | 3 | 0 | 0 | – |
| II | 0 | $z$ | 32/3 | –7/3 | –40/3 | 0 | 0 | 4/3 | – |
| | 1 | $x_4$ | 22/3 | 1/3 | $\boxed{7/3}$ | 0 | 1 | –1/3 | 22/7 |
| | 2 | $x_3$ | 8/3 | 2/3 | –1/3 | 1 | 0 | 1/3 | ∞ |
| | | $f$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | –1 | – |
| III | 0 | $z$ | 368/7 | –3/7 | 0 | 0 | 40/7 | –4/7 | – |
| | 1 | $x_2$ | 22/7 | 1/7 | 1 | 0 | 3/7 | –1/7 | 22 |
| | 2 | $x_3$ | 26/7 | $\boxed{5/7}$ | 0 | 1 | 1/7 | 2/7 | 26/5 |
| IV | 0 | $z$ | 274/5 | 0 | 0 | 3/5 | 29/5 | –2/5 | |
| | 1 | $x_2$ | 12/5 | 0 | 1 | –1/5 | 2/5 | –1/5 | |
| | 2 | $x_1$ | 26/5 | 1 | 0 | 7/5 | 1/5 | 2/5 | |

Застосовуючи на четвертій ітерації *співвідношення 1* для змінних $x_3$ і $x_4$, отримуємо наступні дані:

| Змінні прямої задачі | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|
| Коефіцієнти в $z$-рядку IV ітерації | 3/5 | 29/5 |
| Відповідні обмеження двоїстої задачі | $y_1 + 3y_2 \geq 4$ | $y_1 \geq 0$ |
| Рівняння, які отримані на основі співвідношення 1 | $y_1 + 3y_2 - 4 = 3/5$ | $y_1 - 0 = 29/5$ |

Розв'язками отриманих рівнянь

$y_1 + 3y_2 - 4 = 3/5$,

$y_1 - 0 = 29/5$

будуть $y_1 = 29/5$ і $y_2 = -2/5$.

Якби розв'язок двоїстої задачі шукався незалежно від прямої задачі, то був би отриманий той самий розв'язок. Аналогічно, внаслідок симетричності співвідношення 1, з розв'язку двоїстої задачі та її симплексної таблиці отримаємо оптимальний розв'язок прямої задачі: $x_1 = 26/5$, $x_2 = 12/5$ і $x_3 = 0$.

Для визначення значень змінних двоїстої задачі можна використовувати рівняння, які асоційовані з будь-якими двома змінними з множини $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $u$. Наприклад, співвідношення 1 дає наступні рівняння, які асоційовані зі змінними $x_1$ і $x_3$:

$$y_1 + 2y_2 - 5 = 0,$$

$$y_1 + 3y_2 - 4 = 3/5.$$

---

Наведемо ще одне співвідношення між прямою і двоїстою задачами, яке разом із співвідношенням 1 пропонує цікаву економічну інтерпретацію задачі лінійного програмування.

**Співвідношення 2. Для будь-якої пари допустимих розв'язків прямої і двоїстої задач**

$$\begin{pmatrix} \textit{Значення цільової функції} \\ \textit{в задачі максимізації} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \textit{Значення цільової функції} \\ \textit{в задачі мінімізації} \end{pmatrix}.$$

**В точці оптимуму це співвідношення приймає вид строгої рівності.**

З співвідношення 2 випливає, що для всіх допустимих розв'язків прямої і двоїстої задач значення цільової функції задачі мінімізації завжди будуть верхньою границею значень цільової функції задачі максимізації. Таким чином, ітераційне розв'язування задачі максимізації веде до зростання цільової функції, а ітераційне розв'язування задачі мінімізації – до її спадання. У підсумку, при успішному завершені процесів обчислення прямої і двоїстої задач приходимо до точки „рівноваги", де значення цільових функцій задач максимізації і мінімізації стають рівними.

## 5.3. ЕКОНОМІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ДВОЇСТОСТІ

Задачу лінійного програмування можна розглядати як модель розподілу обмежених ресурсів, в якій цільова функція, що відображає прибуток або дохід від виробничої діяльності, підлягає максимізації. Якщо розглядати задачу лінійного програмування з цієї точки зору, то відповідна їй двоїста задача набуває цікавої економічної інтерпретації.

Для того щоб формалізувати питання економічної інтерпретації двоїстості, наведемо ще раз загальне представлення прямої і двоїстої задач, причому пряма задача буде відігравати роль моделі розподілу ресурсів.

| Пряма задача | Двоїста задача |
|---|---|
| Максимізувати $z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$<br>при обмеженнях<br>$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ (i=1,2,\ldots,m),$<br>$x_j \ge 0,\ (j=1,2,\ldots,n).$ | Мінімізувати $w=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$<br>при обмеженнях<br>$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j,\ (j=1,2,\ldots,n),$<br>$y_i \ge 0,\ (i=1,2,\ldots,m).$ |

Виходячи з моделі розподілення ресурсів, пряма задача відображає $n$ видів економічної (виробничої) діяльності і можливості отримання $m$ ресурсів. В прямої задачі коефіцієнт $c_j$ являє собою прибуток на одиницю продукції $j$-го виду економічної діяльності. Причому на одиницю продукції цього виду діяльності витрачається $a_{ij}$ одиниць ресурсу $i$, максимальні запаси якого обмежені величиною $b_i$.

***Економічна інтерпретація змінних двоїстої задачі.***

Співвідношення 2 з параграфу 5.2 встановлює, що для будь-якої пари розв'язків прямої і двоїстої задач значення (скінченні) їх цільових функцій задовольняють нерівність

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w .$$

Рівність тут досягається тільки тоді, коли розв'язки прямої і двоїстої задач оптимальні.

Розглянемо спочатку випадок оптимуму, тобто коли $z = w$. Виходячи з уявлення прямої задачі як моделі розподілу ресурсів, можна вважати, що величина $z$ відповідає величині прибутку (в гривнях). Оскільки $b_i$ – загальна доступна кількість ресурсу *i*, рівність $z = w$ можна записати наступним чином:

*Прибуток (грн.) =* $\sum_i$ *(кількість ресурсу i)×(прибуток (грн.) на одиницю ресурсу i).*

Це означає, що змінна $y_i$ двоїстої задачі повинна являти собою *вартість одиниці ресурсу i*. В літературі по математичному програмуванню і дослідженню операцій змінні $y_i$ двоїстої задачі часто називають *двоїстими цінами*. Крім того, іноді їх іменують *тіньовими цінами* і *симплексними мультиплікаторами*.

Аналогічно для будь-якої пари допустимих розв'язків прямої і двоїстої задач нерівність $z < w$ можна інтерпретувати наступним чином.

*Прибуток < Загальна вартість ресурсів.*

Це співвідношення показує, що до тих пір, доки сумарний прибуток від всіх видів діяльності менше сумарної вартості всіх ресурсів, що використовуються, розв'язок як прямої, так і двоїстої задачі не може бути оптимальним. Оптимум (максимальний прибуток) може бути досягнутий тільки тоді, коли всі ресурси, які споживаються, використані повністю. Якщо модель лінійного програмування розглядати більш загально як модель деякої системи, яка має „вхід" і „вихід", то ресурси характеризують „вхід" цієї системи, а прибуток – її „вихід". Система буде знаходитись в нестабільному (неоптимальному) стані, доки „вхід" перебільшує

„вихід”. Стійкий стан системи характеризується рівністю „входу” і „виходу”.

***Економічна інтерпретація обмежень двоїстої задачі.***

Для інтерпретації обмежень двоїстої задачі використаємо співвідношення 1 з параграфу 5.2. У відповідності з цим співвідношенням на будь-якій ітерації розв’язування прямої задачі справедлива рівність

$$\textit{Коефіцієнт при } x_j \textit{ в z-рядку} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j .$$

Для інтерпретації цієї рівності скористаємось аналізом розмірностей величин, що входять до нього. Коефіцієнт $c_j$ – прибуток (в гривнях) на одиницю „виходу” *j*-го виду виробничої (економічної) діяльності. Отже, для узгодження розмірностей величина $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ також повинна мати розмірність гривня/одиниця. Далі, оскільки $c_j$ являє собою прибуток, сума $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$, яка входить у рівність з протилежним знаком, повинна відповідати витратам. В той же час коефіцієнт $a_{ij}$ дорівнює кількості ресурсу *i*, який використовується на підтримку *j*-го виду діяльності; змінна $y_i$ представляє *нав’язані витрати* (*нав’язана вартість*) одиниці ресурсу *i*. Таким чином, величина $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ відповідає сумарній вартості всіх ресурсів, які необхідні для виробництва одиниці продукції *j*-го виду діяльності.

Умова оптимальності симплексного методу в задачі максимізації свідчить про те, що *j*-й вид діяльності (змінна $x_j$), який не представлений в поточному базисному розв’язку, можна ввести в базис для збільшення прибутку тільки тоді, коли коефіцієнт при $x_j$ в *z*-рядку (рівний $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$) буде невід’ємним. В рамках економічної інтерпретації, яка пропонується вище, це означає, що *j*-й вид діяльності повинен бути представлений в базисному розв'язку, якщо виконується наступна нерівність:

$$\begin{pmatrix} \textit{Вартість всіх ресурсів, які використо –} \\ \textit{вуються для виробництва одиниці} \\ \textit{продукції } j \textit{ – го виду діяльності} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \textit{Прибуток від реалізації} \\ \textit{одиниці продукції} \\ j \textit{ – го виду діяльності} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, умова оптимальності (в задачі максимізації) свідчить про те, що діяльність будь-якого виду варто нарощувати до тих пір, доки прибуток від неї перевищує можливі витрати (вартість ресурсів), які забезпечують її підтримку.

Наведемо стандартні визначення, які використовуються в літературі по лінійному програмуванню. Введемо позначення $z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$. Величина $z_j$ являє собою сумарну вартість ресурсів, які використовуються на виробництво одиниці продукції $j$-го виду діяльності. Величина $z_j - c_j$ дорівнює коефіцієнту при $x_j$ в $z$-рядку симплексної таблиці і часто називають *приведеною вартістю* (*приведеними витратами*) $j$-го виду діяльності. В деяких випадках різниці $z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$ використовуються безпосередньо для обчислення коефіцієнтів в $z$-рядку симплексної таблиці (замість метода Жордана-Гаусса). Такі обчислення використовуються в *модифікованому симплексному методі*.

**Приклад 5.5.**

Фабрика іграшок збирає три види моделей: літаків, вантажівок і легкових автомобілів; при зборці кожного виду використовується три види операцій. Щоденний фонд робочого часу на кожну операцію обмежений граничними величинами 430, 460 і 420 хвилин. Прибуток на одну іграшку кожного виду складає відповідно 3 грн., 2 грн. і 5 грн. На кожній з трьох операцій для зборки моделі літака треба 1, 3 і 1 хвилини робочого часу. Відповідний час для зборки моделей вантажівок і легкових автомобілів складає (2, 0, 4) і (1, 2, 0) хвилин (нуль вказує на те, що відповідна операція не виконується).

Позначимо через $x_1$, $x_2$ і $x_3$ кількість збираних щоденно моделей трьох видів, отримуємо пряму і двоїсту задачі лінійного програмування.

| Пряма задача | Двоїста задача |
|---|---|
| Максимізувати<br>$z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$<br>при обмеженнях<br>$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$, (операція 1)<br>$3x_1 + 2x_3 \le 460$ , (операція 2)<br>$x_1 + 4x_2 \le 420$, (операція 3)<br>$x_1, x_2, x_3 \ge 0$. | Мінімізувати<br>$w = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$<br>при обмеженнях<br>$y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3$,<br>$2y_1 + 4y_3 \ge 2$,<br>$y_1 + 2y_2 \ge 5$,<br>$y_1, y_2, y_3 \ge 0$. |
| Оптимальний розв'язок<br>$x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 230$, $z = 1350$ | Оптимальний розв'язок<br>$y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$ |

Оптимальний розв'язок передбачає виробництво моделей вантажівок ($x_2 = 100$) і легкових автомобілів ($x_3 = 230$) і вимагає відмову від виробництва літаків ($x_1 = 0$). Це означає, що у теперішній економічній ситуації виробництво моделей літаків не рентабельно. Разом з тим ринок іграшок вимагає випуску цього виду моделей. Як зробити їх виробництво прибутковим? У відповідності з економічною інтерпретацією задач лінійного програмування, яка наведена в цьому розділі, виробництво моделей літаків буде вигідним тільки тоді, коли буде виконуватись нерівність $z_1 < c_1$. Для виконання цієї нерівності треба або збільшити коефіцієнт $c_1$ (прибуток від продажі однієї моделі літака), наприклад шляхом збільшення ціни моделі, або знизити вартість ресурсів $z_1$ ($z_1 = y_1 + 3y_2 + y_3$), необхідних для виробництва цих іграшок. Збільшення ціни моделі не бажане, так як знизить їх конкурентноздатність на ринку іграшок. Зменшення коефіцієнту $z_1$ більш привабливе, оскільки для цього треба просто скоротити час виконання операцій, необхідних для виробництва моделей літаків. Позначимо через $r_1$, $r_2$ і $r_3$ величини, які пропорційні часткам скорочення часу відповідних операцій. Ці величини знаходимо з умови, щоб нова вартість виробничих операцій не перебільшувала прибутку від однієї моделі літака. Ця умова записується наступним чином:

$$1(1-r_1)y_1 + 3(1-r_2)y_2 + 1(1-r_3)y_3 < 3.$$

Після підстановки значень $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ і $y_3 = 0$ отримуємо наступну нерівність:

$$r_1 + 6r_2 > 4.$$

Таким чином, будь-які значення величин $r_1$ і $r_2$, від 0 до 1, які задовольняють нерівність $r_1 + 6r_2 > 4$, приведуть до прибутковості виробництва моделей літаків. Наприклад, для значень $r_1 = 0{,}6$ і $r_2 = 0{,}6$ отримуємо $z_1 - c_1 = 4 - 0{,}6 - 6 \cdot 0{,}6 = -0{,}2$. Разом з тим відмітимо, що скорочення часу виконання другої операції в 6 разів ефективніше скорочення часу виконання першої операції.

## 5.4. ДВОЇСТИЙ СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

У цьому параграфі розглянемо симплексний алгоритм, який заснований на співвідношеннях між прямою і двоїстою задачами. Цей алгоритм ефективно розв’язує певний клас задач лінійного програмування. Крім того, він дозволяє довести до кінця аналіз чутливості моделі лінійного програмування.

В двоїстому симплексному методі розв’язування задачі лінійного програмування починається з недопустимого, але кращого, ніж оптимальний, розв’язку. Послідовні ітерації цього методу наближають розв’язок до області допустимих розв’язків без порушення оптимальності (точніше, „супероптимальності”) проміжних розв’язків. Коли буде досягнута область допустимих розв’язків, процес обчислень завершується, так як останній розв’язок буде оптимальним. Двоїстий симплексний метод суттєво відрізняється від звичайного (прямого) симплексного методу, який розглянутий в розділі IV, де початковий розв'язок завжди допустимий, але не оптимальний, і проміжні розв'язки ніколи не виходять з множини допустимих розв'язків.

В двоїстому симплексному методі початкова симплексна таблиця обов'язково повинна мати в базисному розв'язку недопустиму (тобто від'ємну) змінну. Для реалізації двоїстого симплексного методу розроблені наступні дві умови, виконання яких гарантує оптимальність послідовних проміжних розв'язків та наближення їх до множини допустимих розв'язків.

Двоїста умова допустимості. В якості змінної $x_i$, що виводиться з базису, обирається базисна змінна, яка має найбільше за абсолютною величиною від'ємне значення. Якщо таких змінних декілька, то вибір з них довільний. Якщо всі базисні змінні невід'ємні, процес обчислень завершується.

Двоїста умова оптимальності. Змінна, що вводиться у базис, визначається як змінна, на якій досягається наступний мінімум:

$$\min_{небазисні\ x_j} \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{\alpha_{ij}} \right| \right\}, \quad \alpha_{ij} < 0,$$

де $\alpha_{ij}$ – коефіцієнт із симплексної таблиці, який міститься на перетині ключового рядка (що відповідає змінній $x_i$, яка виводиться з базису) і стовпця, який відповідає змінній $x_j$. При наявності декількох альтернативних змінних, вибір з них робиться довільно.

---

**Приклад 5.6.**

Дана задача лінійного програмування.

Мінімізувати $z = 3x_1 + 2x_2$

при обмеженнях

$3x_1 + x_2 \geq 3$,

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$,

$x_1 + x_2 \le 3$,

$x_1, x_2 \ge 0$.

Початкова симплексна таблиця має наступний вид:

| № ітерації | № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 0 | $z$ | 0 | –3 | –2 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | $x_3$ | –3 | –3 | –1 | 1 | 0 | 0 |
| | 2 | $x_4$ | –6 | –4 | –3 | 0 | 1 | 0 |
| | 3 | $x_5$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Перед тим як були введені додаткові змінні $x_3$ і $x_4$, відповідні нерівності (перша і друга) були помножені на –1; в наслідок чого праві частини рівностей 1 і 2 безпосередньо вказують на базисні змінні, які є недопустимими ($x_3 = -3$, $x_4 = -6$). Цей підхід завжди використовується при реалізації двоїстого симплексного методу. Оскільки $z_j - c_j \le 0$ для всіх $j = 1, 2, \dots, 5$ (нульовий рядок симплексної таблиці), то початковий базисний розв'язок є оптимальним (але недопустимим). Таким чином, наведена таблиця задовольняє вимогам початкової таблиці двоїстого симплексного методу, а саме – оптимальності і недопустимості.

Двоїста умова допустимості вказує на змінну $x_4$ ($x_4 = -6$) як на змінну, що виводиться з базису. Тепер застосуємо двоїсту умову оптимальності для визначення змінної, яка вводиться в базис. Для цього використаємо наступну таблицю:

| Змінні | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| z-рядок $(z_j - c_j)$ | –3 | –2 | 0 | 0 | 0 |
| $x_4$-рядок, $\alpha_{4j}$ | –4 | –3 | 0 | 1 | 0 |
| Відношення $\left\lvert \dfrac{z_j - c_j}{\alpha_{4j}} \right\rvert$ | 3/4 | 2/3 | – | – | – |

Наведені відношення показують, що змінною, яка вводиться в базис, буде $x_2$. Відмітимо, що змінні $x_j$ будуть кандидатами на введення в базис тільки тоді, коли коефіцієнт $\alpha_{4j}$ буде строго від'ємним.

Наступна таблиця отримана за допомогою відомих операцій, які застосовуються в прямому симплексному методі.

| № ітерації | № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| II | 0 | $z$ | 4 | –1/3 | 0 | 0 | –2/3 | 0 |
| | 1 | $x_3$ | –1 | –5/3 | 0 | 1 | –1/3 | 0 |
| | 2 | $x_2$ | 2 | 4/3 | 1 | 0 | –1/3 | 0 |
| | 3 | $x_5$ | 1 | –1/3 | 0 | 0 | 1/3 | 1 |
| Відношення | | | | 1/5 | – | – | 2 | – |

Остання таблиця показує, що з базису виключається змінна $x_3$ і вводиться $x_1$. В результаті отримуємо наступну симплексну таблицю.

| № ітерації | № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| III | 0 | $z$ | 21/5 | 0 | 0 | –1/5 | –3/5 | 0 |
| | 1 | $x_1$ | 3/5 | 1 | 0 | –3/5 | 1/5 | 0 |
| | 2 | $x_2$ | 6/5 | 0 | 1 | 4/5 | –3/5 | 0 |
| | 3 | $x_5$ | 6/5 | 0 | 0 | –1/5 | 2/5 | 1 |

Розв'язок, який представлений в останній таблиці, допустимий (і оптимальний), тому обчислення завершуються. Цей розв'язок має вид $x_1 = 3/5$, $x_2 = 6/5$ і $z = 21/5$.

## 5.5. Матричне представлення симплексних обчислень

При аналізі чутливості розв'язку задачі лінійного програмування принциповим є питання: як зміна коефіцієнтів цільової функції і обмежень впливає на оптимальність і допустимість даного оптимального розв'язку? Якщо ці зміни приводять до нового розв'язку, то як знайти цей новий оптимальний розв'язок? Звичайно, завжди можна дати відповідь на це питання шляхом розв'язку задачі заново. Але для типової практичної задачі, яка має тисячі змінних і обмежень, такий шлях буде не ефективним. Тому необхідно з'ясувати, як обчислення у симплексному методі залежать від зміни коефіцієнтів вихідної задачі. Зокрема, слід з'ясувати, як від цих змін залежать оптимальність і допустимість розв'язку, який представлений у вигляді симплексної таблиці.

Найбільш компактний спосіб запису обчислень, які виконуються при симплексному методі, заключається у використанні матриць.

Канонічна задача лінійного програмування за допомогою матричної форми запису може бути представлена наступним чином.

Максимізувати (або мінімізувати) $z = \vec{C}\vec{X}$

при обмеженнях

$$\left(\vec{A},\vec{I}\right)\vec{X} = \vec{b},$$

$$\vec{X} \geq \vec{0},$$

де $\vec{I}$ – одинична матриця розміру $m \times m$, $\vec{X} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T$, $\vec{C} = \left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$ і

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m,n-m} \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Система лінійних рівнянь $\left(\vec{A},\vec{I}\right)\vec{X} = \vec{b}$ з $m$ рівняннями і $n$ змінними може бути представлена в наступній векторній формі

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{P}_j x_j = \vec{b},$$

де вектор $\vec{P}_j$ – $j$-й стовпчик матриці $\left(\vec{A},\vec{I}\right)$. Підмножина з векторів $\vec{P}_j$ формує базис $\vec{B}$ тоді і тільки тоді, коли ці вектори лінійно незалежні. Для цього необхідно (і достатньо), щоб визначник матриці $\vec{B}$, який складається з даних $m$ векторів, був відмінний від нуля, тобто $\det\vec{B}\neq 0$. В цьому випадку матриця $\vec{B}$ називається невиродженою.

Для системи $m$ рівнянь $(\vec{A},\vec{I})\vec{X}=\vec{b}$ з $n$ змінними ($m<n$) позначимо через $\vec{X}_B$ вектор з $m$ елементів, які є підмножиною $n$ елементів вектора $\vec{X}$. Визначимо матрицю $\vec{B}$ розміром $m\times m$, яка складається з стовпчиків матриці $(\vec{A},\vec{I})$, які відповідають елементам вектора $\vec{X}_B$. Якщо надати $n-m$ елементам, що залишились, нульових значень, то система $(\vec{A},\vec{I})\vec{X}=\vec{b}$ буде зведена до $\vec{B}\vec{X}_B=\vec{b}$.

Якщо матриця $\vec{B}$ складається з базисних векторів, тоді маємо єдиний розв'язок останньої системи:

$$\vec{X}_B=\vec{B}^{-1}\vec{b},$$

де $\vec{B}^{-1}$ – матриця, обернена до матриці $\vec{B}$. В цьому випадку $\vec{X}_B$ є базисним розв'язком системи $(\vec{A},\vec{I})\vec{X}=\vec{b}$. Якщо виконується нерівність $\vec{B}^{-1}\vec{b}\geq\vec{0}$, тоді $\vec{X}_B$ буде допустимим розв'язком.

Скористаємось узагальненим матричним представленням симплексних таблиць.

| Базис | ОП | $\ldots x_j \ldots$ | Початковий базис $\vec{X}_B$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | | $z_j - c_j$ | |
| $\vec{X}_B$ | $\vec{B}^{-1}\vec{b}$ | $\vec{B}^{-1}\vec{P}_j$ | $\vec{B}^{-1}$ |

Ця таблиця має той же самий формат, як і звичайна симплексна таблиця. Тут вектор $\vec{X}_B$ містить базисні змінні поточного розв'язку. Обернена матриця $\vec{B}^{-1}$ розміщується під початковими базисними змінними. Елементи оберненої матриці будуть змінюватись при переході від однієї ітерації до іншої як функції вектора $\vec{X}_B$.

Обчислення елементів системи обмежень, які відповідають новій ітерації, виконуються безпосередньо. Наприклад, стовпці $\vec{P}_j$ і $\vec{b}$ вихідної задачі (I ітерації) перетворюються в стовпці $\vec{B}^{-1}\vec{P}_j$ і $\vec{B}^{-1}\vec{b}$ наступної ітерації. Залишилось розглянути обчислення елементів $z$-рядка. Позначимо через $\vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $m$-мірний вектор змінних двоїстої задачі. В параграфі 5.2 було показано, що значення змінних двоїстої задачі можна знайти як розв'язок системи лінійних рівнянь. В компактній матричній формі це можна записати так: $\vec{Y} = \vec{C}_B\vec{B}^{-1}$, де $\vec{C}_B$ – $m$-мірний вектор, що складається з коефіцієнтів $c_j$ вихідної цільової функції, які відповідають базисному вектору $\vec{X}_B$. Таким чином, різниці $z_j - c_j$ можна обчислити наступним чином:

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j = \vec{Y}\vec{P}_j - c_j \ .$$

Останній вираз показує, що величина $z_j - c_j$ дорівнює різниці між лівою і правою частинами обмеження двоїстої задачі (як і показано в параграфі 5.3).

Таким чином, всі елементи поточної ітерації обчислюються на основі поточної оберненої матриці $\vec{B}^{-1}$ і вихідних данних задачі.

**Приклад 5.7.**

Використаємо задачу з прикладу 5.4 для демонстрації матричних обчислень. Пряма і двоїста задачі цього прикладу за допомогою матриць будуть записані наступним чином.

| Пряма задача | Двоїста задача |
|---|---|
| Максимізувати $z=(5,12,4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$<br>при обмеженнях<br>$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}$,<br>$x_1, x_2, x_3 \geq 0$. | Мінімізувати $w=(y_1, y_2)\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}$<br>при обмеженнях<br>$(y_1, y_2)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & -1 & 3\end{pmatrix}\geq(5,12,4)$,<br>$y_1 \geq 0$,<br>$y_2$ – без обмеження по знаку. |

Описані обчислення можна застосовувати на будь-якій ітерації. Продемонструємо їх на другій ітерації симплексного методу, основуючись на початковому розв'язку (перша ітерація), який наведений у прикладі 5.4. З цього розв'язку маємо

$$\vec{X}_B=\begin{pmatrix}x_4\\x_3\end{pmatrix},\ \vec{C}_B=(0,4).$$

Відмітимо, що порядок елементів у векторі $\vec{C}_B$ повинен бути той же самий, що і в базисному векторі $\vec{X}_B$, тобто спочатку $c_4$ потім $c_3$. Теж саме стосується порядку векторів-стовпців матриці $\vec{B}$, які відповідають базисним змінним II ітерації. В нашому прикладі базисному вектору $\vec{X}_B=\begin{pmatrix}x_4\\x_3\end{pmatrix}$ відповідає матриця $\vec{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}$ (елементи матриці $\vec{B}$ завжди виписуються з вихідної матриці системи основних обмежень). Тоді

$$\vec{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1/3\\0 & 1/3\end{pmatrix}.$$

Тепер обчислюємо вектор змінних двоїстої задачі:

$$(y_1, y_2)=\vec{Y}=\vec{C}_B\vec{B}^{-1}=(0,4)\begin{pmatrix}1 & -1/3\\0 & 1/3\end{pmatrix}=\left(0,\frac{4}{3}\right).$$

Далі знаходимо коефіцієнти $z$-рядка.

$$z_1 - c_1 = \vec{Y}\vec{P}_1 - c_1 = \left(0, \frac{4}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 5 = -\frac{7}{3}.$$

Аналогічно обчислюються наступні різності: $z_2 - c_2 = -40/3$, $z_3 - c_3 = 0$, $z_4 - c_4 = 0$ і $z_5 - c_5 = 4/3$.

Коефіцієнти рівностей, що відповідають обмеженням, обчислюються за допомогою оберненої матриці $\vec{B}^{-1}$ і векторів-стовпців $\vec{P}_j$ і $\vec{b}$ коефіцієнтів вихідних обмежень. Стовпчик правих частин обмежень на другій ітерації симплексного методу обчислюється наступним чином:

$$\vec{X}_B = \vec{B}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{22}{3}\\ \frac{8}{3}\end{pmatrix}.$$

Обчислення стовпців коефіцієнтів лівих частин обмежень покажемо на прикладі обчислення стовпця коефіцієнтів, що відповідають змінній $x_1$:

$$\vec{B}^{-1}\vec{P}_1 = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

Стовпці коефіцієнтів, які відповідають змінним $x_2$, $x_3$, $x_4$ і $u$, обчислюються аналогічно.

---

Основний висновок, який випливає з прикладу 5.7, полягає в тому, що всі коефіцієнти симплексної таблиці на будь-якій ітерації можна обчислити всього лише на основі відповідної оберненої матриці $\vec{B}^{-1}$ і вихідних даних задачі лінійного програмування. Таким чином, при аналізі чутливості оптимального розв'язку конкретної задачі лінійного програмування, для якого відома обернена матриця $\vec{B}^{-1}$, можна досліджувати ефект від зміни коефіцієнтів цільової функції і значення правих частин нерівностей системи обмежень за допомогою нових обчислень всіх різниць $z_j - c_j$ (коефіцієнтів $z$-рядка) і добутку $\vec{B}^{-1}\vec{b}$. Якщо результати цих обчислень покажуть, що новий базисний розв'язок (тобто $\vec{X}_B$) залишається допустимим і оптимальним, обчислення аналізу чутливості закінчуються. У протилежному випадку необхідні додаткові обчислення, які повертають оптимальність і допустимість досліджуваному розв'язку.

### 5.6. АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування визначається тими умовами, які найшли відображення в моделі на момент її формування. В реальному житті умови, які формують модель, не залишаються незмінними. У зв'язку з цим особливого значення набувають засоби, що дозволяють оцінити зміни в оптимальному розв'язку, які викликані змінами в параметрах вихідної моделі. Таким засобом є *аналіз чутливості*. Він пропонує ефективні обчислювальні методи, які дозволяють вивчати динамічну поведінку оптимального розв'язку.

Аналіз чутливості на елементарному рівні вже розглядався у параграфі 3.6. В цьому параграфі розглядаються методи аналізу чутливості, які засновані на теорії двоїстості.

Аналіз чутливості передбачає, що зміна параметрів моделі відбувається лінійно. Узагальнюючи, можна припустити, що параметри моделі змінюються згідно наперед визначеним неперервним функціям. Сукупність методів, які відповідають цьому узагальненню, називається параметричним програмуванням, яке буде розглянуте в розділі 8.

Аналіз чутливості виконується вже після отримання оптимального розв'язку задачі лінійного програмування. Його мета – визначити, чи приведе зміна коефіцієнтів вихідної задачі до зміни отриманого оптимального розв'язку, і якщо так, то як ефективно знайти новий оптимальний розв'язок (якщо він існує).

У загальному випадку зміна коефіцієнтів вихідної задачі може привести до однієї з наступних чотирьох ситуацій:

1. Поточний базисний розв'язок залишається незмінним.

2. Поточний розв'язок стає недопустимим.
3. Поточний розв'язок стає неоптимальним.
4. Поточний розв'язок стає неоптимальним і недопустимим.

У другій ситуації можна використати двоїстий симплексний метод для поновлення допустимості розв'язку. В третій ситуації можна скористатися прямим симплексним методом для отримання нового оптимального розв'язку. В четвертій для отримання нового оптимального і допустимого розв'язку треба скористатись як прямим, так і двоїстим симплексним методом.

Для пояснення різних процедур аналізу чутливості використаємо модель фабрики іграшок з прикладу 5.5. Нагадаємо, що фабрика збирає три види дитячих іграшок: моделі літаків, вантажівок і легкових автомобілів. Зборка моделі кожного виду потребує послідовного застосування трьох операцій. В задачі необхідно визначити об'єми виробництва кожного виду іграшок, які максимізують загальний прибуток. Для зручності викладення матеріалу повторимо формулювання прямої і двоїстої задач.

| Пряма задача | Двоїста задача |
|---|---|
| Максимізувати $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$<br>при обмеженнях<br>$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$, (операція 1)<br>$3x_1 + 2x_3 \le 460$, (операція 2)<br>$x_1 + 4x_2 \le 420$, (операція 3)<br>$x_1, x_2, x_3 \ge 0$. | Мінімізувати $w = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$<br>при обмеженнях<br>$y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3$,<br>$2y_1 + 4y_3 \ge 2$,<br>$y_1 + 2y_2 \ge 5$,<br>$y_1, y_2, y_3 \ge 0$. |
| Оптимальний розв'язок<br>$x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 230$, $z = 1350$ | Оптимальний розв'язок<br>$y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$ |

Наведемо симплексну таблицю, яка містить оптимальний розв'язок прямої задачі.

| № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $z$ | 1350 | 4 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | $x_2$ | 100 | –1/4 | 1 | 0 | 1/2 | –1/4 | 0 |
| 2 | $x_3$ | 230 | 3/2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 0 |
| 3 | $x_6$ | 20 | 2 | 0 | 0 | –2 | 1 | 1 |

***Зміни, які впливають на допустимість розв'язку.***

До недопустимості поточного оптимального розв'язку може привести, по-перше, зміна правих частин обмежень (тобто зміна елементів вектора $\vec{b}$) і, по-друге, введення в множину обмежень задачі нового обмеження. В будь-якому випадку недопустимість розв'язку проявиться в тому, що , принаймні, один елемент вектора $\vec{B}^{-1}\vec{b}$ стане від'ємним, тобто одна або декілька базисних змінних приймуть від'ємне значення.

Зміни елементів вектора $\vec{b}$ правих частин обмежень. У наступному прикладі проілюстрований підхід до дослідження ситуації, коли змінюються декілька елементів вектора $\vec{b}$.

---

**Приклад 5.8**

Припустимо, що фабрика іграшок планує розширити виробництво своєї продукції шляхом збільшення можливостей складальних ліній на 40%, що дасть наступний фонд робочого часу для кожного виду складальної операції: 602, 644 і 588 хвилин відповідно. Ці зміни впливають тільки на праві частини нерівностей системи обмежень. За формулою $\vec{X}_B = \vec{B}^{-1}\vec{b}$ знайдемо новий розв'язок задачі.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 602 \\ 644 \\ 588 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 322 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, поточні базисні змінні $x_2$, $x_3$ і $x_6$ з новими значеннями 140, 322 і 28 як і раніше складають допустимий розв'язок. Відповідне цьому розв'язку оптимальне значення цільової функції (максимальний прибуток) дорівнює 1890 грн.

Хоч новий розв'язок і приводить до збільшення прибутку фабрики, реалізація заходів, які необхідні для такого зростання виробництва, потребує певного часу. Часовою альтернативою такої модернізації виробництва може бути „перенос" невикористаного фонду робочого часу третьої операції ($x_6 = 20$ хвилин) у фонд першої. Тоді фонд робочого часу трьох складальних операцій буде рівний 450, 460 і 400 хвилин відповідно. З урахуванням нових обмежень отримаємо наступний розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 450 \\ 460 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 230 \\ -40 \end{pmatrix}.$$

Отриманий розв'язок не є допустимим, оскільки тепер $x_6 = -40$. Для повернення в область допустимих розв'язків можна застосувати двоїстий симплексний метод. Спочатку замінимо значення в стовпці „ОП" симплексної таблиці (ці нові значення виділені в наступній симплексній таблиці). Відмітимо, що відповідне значення цільової функції дорівнює $z = 3 \times 0 + 2 \times 110 + 5 \times 230 = 1370$ грн.

| № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $z$ | 1370 | 4 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | $x_2$ | 110 | –1/4 | 1 | 0 | 1/2 | –1/4 | 0 |
| 2 | $x_3$ | 230 | 3/2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 0 |
| 3 | $x_6$ | –40 | 2 | 0 | 0 | –2 | 1 | 1 |

У відповідності з двоїстим симплексним методом виключаємо змінну $x_6$, а вводимо – $x_4$. В результаті отримаємо наступну симплексну таблицю з оптимальним допустимим розв'язком. (В загальному випадку для отримання допустимого розв'язку може знадобитись декілька ітерацій двоїстого симплексного методу).

| № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $z$ | 1350 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5/2 | 1/2 |
| 1 | $x_2$ | 100 | 1/4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/4 |
| 2 | $x_3$ | 230 | 3/2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 0 |
| 3 | $x_4$ | 20 | –1 | 0 | 0 | 1 | –1/2 | –1/2 |

По суті, оптимальний розв'язок залишився незмінним. Це означає, що у даному випадку „перенос" частини фонду робочого часу третьої операції у фонд робочого часу першої операції не приводить до покращення цільової функції.

---

Інтервали допустимих змін для елементів вектора $\vec{b}$. Другий спосіб дослідження впливу доступності ресурсів (тобто елементів вектора $\vec{b}$ правих частин нерівностей обмежень) полягає у визначені інтервалів допустимості для цих елементів, які зберігають поточний розв'язок допустимим. Наступний приклад ілюструє даний метод аналізу чутливості.

---

**Приклад 5.9.**

Нехай, в задачі про фабрику іграшок нас цікавить інтервал допустимості для значення фонду робочого часу першої операції. Замінимо вектор $\vec{b}$ вектором

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 430 + D_1 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix}.$$

Змінна $D_1$ являє собою зміну фонду робочого часу першої операції у порівнянні з поточним рівнем в 430 хвилин. Для того щоб поточний базисний розв'язок залишився допустимим, необхідно виконання нерівності $\vec{X}_B = \vec{B}^{-1}\vec{b}_1 \geq 0$. Звідси отримуємо наступну систему нерівностей:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 430 + D_1 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 + \frac{D_1}{2} \\ 230 \\ 20 - 2D_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перша нерівність $x_2 \geq 0$ дає $D_1 \geq -200$, друга нерівність $x_3 \geq 0$ не залежить від $D_1$, третя дає умову $D_1 \leq 10$. Таким чином, поточний базисний розв’язок залишається допустимим при виконанні нерівностей $-200 \leq D_1 \leq 10$. Це еквівалентно наступному інтервалу допустимості для фонду робочого часу першої операції:

$$430 - 200 \leq \textit{Фонд робочого часу першої операції} \leq 430 + 10$$

або

$$230 \leq \textit{Фонд робочого часу першої операції} \leq 440 .$$

Зміни значення цільової функції, які відповідають зміні $D_1$, дорівнює $D_1 y_1$, де $y_1$ – вартість (в грн.) однієї хвилини фонду робочого часу першої операції (тобто двоїста ціна цього ресурсу).

Для того щоб проілюструвати використання даного інтервалу допустимості, припустимо, що фонд робочого часу першої операції змінився від 430 до 400 хвилин. Поточний базисний розв’язок залишається допустимим, оскільки нове значення фонду робочого часу першої операції належить інтервалу допустимості. Для обчислення нових значень змінних скористаємось значенням $D_1 = 400 - 430 = -30$. Далі отримуємо наступне:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 + \frac{1}{2}(-30) \\ 230 \\ 20 - 2(-30) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 230 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Для обчислення нового значення цільової функції спочатку знайдемо значення двоїстих цін:

$$\left(y_1, y_2, y_3\right) = \vec{C}_B \vec{B}^{-1} = \left(2{,}5{,}0\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(1{,}2{,}0\right).$$

Таким чином, вартість однієї хвилини фонду робочого часу першої операції рівна $y_1 = 1$ грн. Тоді зміна оптимального прибутку складатиме $D_1 y_1 = -30 \times 1 = -30$ грн. Слід пам'ятати, що дана вартість хвилини фонду робочого часу першої операції, рівна $y_1 = 1$ грн. має місце тільки для вказаного вище інтервалу зміни $D_1$. Будь-яка зміна, яка виходить за межі цього інтервалу, приводить до недопустимого розв'язку. У такому випадку слід використати двоїстий симплексний метод для знаходження нового розв'язку, якщо він існує.

---

Аналогічну процедуру можна використати при визначені інтервалів допустимості для змінних $D_2$ і $D_3$, які рівні зміні фондів робочого часу другої і третьої складальних операцій. Визначення інтервалів допустимості для $D_1$, $D_2$ і $D_3$ як описано вище, і їх співвідношень із змінними $y_1$, $y_2$ і $y_3$ двоїстої задачі коректні тільки тоді, коли ці ресурси розглядаються незалежно один від одного. При одночасній зміні усіх трьох ресурсів, поточний вектор $\vec{b}$ необхідно замінити на $\vec{b}^*$ з елементами $\left(430 + D_1, 460 + D_2, 420 + D_3\right)$ (вправа 5.21).

<u>Додання нових обмежень</u>. Додання нового обмеження в існуючу модель лінійного програмування може привести до однєї з наступних ситуацій:

Нове обмеження є надмірним. Це означає, що нове обмеження виконується при поточному оптимальному розв'язку.

Нове обмеження не виконується при поточному оптимальному розв'язку. В цьому випадку необхідно застосувати двоїстий симплексний метод, щоб отримати новий оптимальний розв'язок (принаймні спробувати його знайти).

**Приклад 5.10.**

Припустимо, що фабрика іграшок змінила конструкцію моделей, і тепер для їх виробництва необхідна четверта складальна операція. Щоденний фонд робочого часу цієї операції складає 500 хвилин. Час виконання цієї операції при виробництві однієї іграшки різних видів складає відповідно 3, 1 і 1 хвилина. В результаті отримуємо нове обмеження: $3x_1 + x_2 + x_3 \le 500$. Це обмеження є надмірним, оскільки воно задовольняється при поточному оптимальному розв'язку $x_1 = 0$, $x_2 = 100$ і $x_3 = 230$. Таким чином, поточний оптимальний розв'язок залишається незмінним.

**Приклад 5.11.**

Припустимо, що в моделі фабрики іграшок час виконання нової четвертої операції складає відповідно 3, 3 і 1 хвилину при виробництві однієї іграшки різних видів. В цьому випадку четверте обмеження $3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 500$ не буде надмірним, і поточний оптимальний розв'язок йому не задовольняє. Ми повинні ввести нове обмеження у симплексну таблицю, де представлений поточний оптимальний розв'язок.

| № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $z$ | 1350 | 4 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | $x_2$ | 100 | –1/4 | 1 | 0 | 1/2 | –1/4 | 0 | 0 |
| 2 | $x_3$ | 230 | 3/2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | 0 |
| 3 | $x_6$ | 20 | 2 | 0 | 0 | –2 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | $x_7$ | 500 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Оскільки, змінні $x_2$ і $x_3$ є базисними, то з четвертого рядка необхідно виключити коефіцієнти, які їм відповідають (тобто треба зробити їх нульовими). Для цього треба виконати наступні операції:

*Новий рядок* 4 = *Старий рядок* 4 – [3×(*рядок* 1)+1×(*рядок* 2)].

В результаті отримуємо нову симплексну таблицю.

| № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $z$ | 1350 | 4 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | $x_2$ | 100 | –1/4 | 1 | 0 | 1/2 | –1/4 | 0 | 0 |
| 2 | $x_3$ | 230 | 3/2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | 0 |
| 3 | $x_6$ | 20 | 2 | 0 | 0 | –2 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | $x_7$ | –30 | 9/4 | 0 | 0 | –3/2 | 1/4 | 0 | 1 |

За допомогою двоїстого симплексного методу знаходимо новий оптимальний розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 90$, $x_3 = 230$ і $z = 1330$ грн. (перевірте!).

---

***Зміни, які впливають на оптимальність розв'язку.***

Поточний оптимальний розв'язок перестає бути оптимальним, якщо різниці $z_j - c_j$ не задовольняють умову оптимальності. Використовуючи вектор двоїстих цін $\vec{Y} = \vec{C}_B \vec{B}^{-1}$, визначений у параграфі 5.5, запишемо

$$z_j - c_j = \vec{Y}\vec{P}_j - c_j .$$

Звідси випливає, що на оптимальність розв'язку впливають тільки коефіцієнти $c_j$ цільової функції (і, отже, вектор $\vec{C}_B$) і вартості ресурсів, які представлені векторами $\vec{P}_j$. Розглянемо послідовно кожний фактор, який впливає на оптимальність розв'язку.

<u>Зміни коефіцієнтів цільової функції</u>. Для визначення впливу змін коефіцієнтів цільової функції слід обчислити різниці $z_j - c_j$ тільки для небазисних змінних, оскільки при будь-яких змінах коефіцієнтів $c_j$, які відповідають базисним змінним, різниці $z_j - c_j$ завжди залишаються рівними нулю.

Обчислення виконуються за наступним алгоритмом.

1. Обчислюється вектор двоїстих цін $\vec{Y} = \vec{C}_B \vec{B}^{-1}$ для нового вектора коефіцієнтів $\vec{C}_B$.
2. Обчислюються різниці $z_j - c_j = \vec{Y}\vec{P}_j - c_j$ для поточної небазисної змінної $x_j$.

При цьому можливі два варіанти:

а) якщо умова оптимальності виконується, то поточний розв'язок залишається оптимальним, але значення цільової функції може змінитись;

б) якщо умова оптимальності не виконується, то слід застосувати прямий симплексний метод для отримання нового оптимального розв'язку.

---

**Приклад 5.12.**

Припустимо, що фабрика іграшок проводить нову цінову політику відносно своїх виробів. У відповідності з цим прибуток від однієї моделі літака, вантажівки і легкового автомобіля складає відповідно 4, 3, і 4 грн. Одержуємо нову цільову функцію для цієї моделі:

Максимізувати $z = 4x_1 + 3x_2 + 4x_3$.

Оскільки поточний базисний розв'язок $\vec{X}_B$ складається із змінних $x_2$, $x_3$ і $x_6$, маємо $\vec{C}_B = (3,4,0)$. Обчислимо вектор двоїстих цін.

$$\vec{Y} = \vec{C}_B \vec{B}^{-1} = (3,4,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0\right).$$

Різниці $z_j - c_j$ для небазисних змінних $x_1$, $x_4$ і $x_5$ обчислюються за формулою $z_j - c_j = \vec{Y}\vec{P}_j - c_j$:

$$z_1 - c_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 - 4 = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{5}{4}\right) + 0 - 4 = \frac{5}{4},$$

$$z_4 - c_4 = y_1 - 0 = \frac{3}{2},$$

$$z_5 - c_5 = y_2 - 0 = \frac{5}{4}.$$

Відмітимо, що тут використовувалось нове значення коефіцієнту цільової функції $c_1 = 4$.

Обчислення показують, що поточний розв’язок $x_1 = 0$, $x_2 = 100$ і $x_3 = 230$ залишається оптимальним. Нове значення цільової функції дорівнює $4 \times 0 + 3 \times 100 + 4 \times 230 = 1220$ грн.

Припустимо, що у задачі, яка розглядається, цільова функція має наступний вигляд:

$$z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max.$$

Ця функція співпадає з попередньою цільовою функцією, за винятком того, що коефіцієнт при змінній $x_1$ тепер рівний 6. Тому необхідно перерахувати тільки різницю $z_1 - c_1$. В результаті отримуємо наступне:

$$z_1 - c_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 - 6 = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{5}{4}\right) + 0 - 6 = -\frac{3}{4}.$$

Звідси випливає, що змінну $x_1$ необхідно включити у базисний розв’язок. Маємо наступну симплексну таблицю:

| № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $z$ | 1220 | –3/4 | 0 | 0 | 3/2 | 5/4 | 0 |
| 1 | $x_2$ | 100 | –1/4 | 1 | 0 | 1/2 | –1/4 | 0 |
| 2 | $x_3$ | 230 | 3/2 | 0 | 1 | 0 | 1/2 | 0 |
| 3 | $x_6$ | 20 | 2 | 0 | 0 | –2 | 1 | 1 |

Нові значення різниць $z_j - c_j$ для небазисних змінних $x_1$, $x_4$ і $x_5$ у симплексній таблиці виділені. Всі інші елементи таблиці залишились такими ж, як і у вихідній таблиці з оптимальним розв’язком. Для знаходження нового оптимального розв’язку необхідно ввести у базис змінну

$x_1$ і виключити з нього змінну $x_6$. В результаті отримуємо розв’язок $x_1 = 10$, $x_2 = 102{,}5$, $x_3 = 215$ і $z = 1227{,}50$ грн. (перевірте!).

Крім того, для дослідження впливу коефіцієнтів цільової функції на оптимальність розв’язку можна також обчислити (окремо) інтервали зміни кожного коефіцієнта, які зберігають оптимальність поточного розв’язку. Для цього необхідно замінити поточний коефіцієнт $c_j$ виразом $c_j + d_j$, де $d_j$ – величина (додатна або від’ємна) зміни коефіцієнта $c_j$.

Обмеження на величини $d_j$ можна визначити шляхом обчислення нових різниць $z_j - c_j$ і накладання на них відповідної умови оптимальності, яка залежить від того, чи розглядається задача максимізації чи мінімізації.

Додання у модель лінійного програмування нового виду виробничої діяльності. Введення в модель лінійного програмування нового виду виробничої діяльності еквівалентно доданню нової змінної в задачу. Додання нового виду виробничої діяльності інтуїтивно обґрунтовано тільки у тому випадку, коли ця діяльність економічно рентабельна, тобто покращує оптимальне значення цільової функції. Цю умову можна перевірити шляхом обчислення для нової змінної різниці $z_j - c_j = \vec{Y}\vec{P}_j - c_j$, де $\vec{Y}$ – вектор оптимальних значень двоїстої задачі, $\vec{P}_j$ і $c_j$ – відповідно ресурси, які використовуються для забезпечення нового виду діяльності, і прибуток від одиниці „виходу” цієї діяльності. Якщо обчислене значення різниці $z_j - c_j$ задовольняє умову оптимальності, то нова діяльність небажана оскільки не покращує оптимального розв’язку. Якщо ж обчислене значення різниці не задовольняє умову оптимальності, то новий вид діяльності є рентабельним і змінна, яка йому відповідає, повинна бути включена в базисний розв’язок.

**Приклад 5.13.**

Оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування про фабрику іграшок показує, що виробництво моделей літаків нерентабельне. Тому фабрика планує замінити виробництво цих моделей випуском нових іграшок, а саме моделлю пожежної машини, причому її складання буде здійснюватись з використанням тих же виробничих потужностей. Фабрика підрахувала прибуток від нової іграшки в 4 грн. за одну модель. Її час складання на кожній з трьох технологічних операцій складає відповідно 1, 1 і 2 хвилини.

Позначимо через $x_7$ об'єм виробництва нової продукції. Оскільки в цій ситуації поточний базисний вектор $\vec{C}_B$ не змінився, можна для подальших розрахунків використати поточний вектор значень змінних двоїстої задачі $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 0)$. Обчислимо різницю $z_7 - c_7$.

$$z_7 - c_7 = 1y_1 + 1y_2 + 2y_3 - 4 = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 0 - 4 = -1.$$

Отриманий результат показує, що економічно доцільно включити змінну $x_7$ в оптимальний базисний розв'язок. Для знаходження нового оптимального розв'язку спочатку обчислюємо

$$\vec{B}^{-1}\vec{P}_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що поточна симплексна таблиця повинна бути приведена до наступного вигляду:

| № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_7$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $z$ | 1350 | 4 | 0 | 0 | –1 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | $x_2$ | 100 | –1/4 | 1 | 0 | 1/4 | 1/2 | –1/4 | 0 |
| 2 | $x_4$ | 230 | 3/2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 |
| 3 | $x_6$ | 20 | 2 | 0 | 0 | 1 | –2 | 1 | 1 |

Тепер новий оптимальний розв'язок можна знайти шляхом введення в базис змінної $x_7$ і виключення з нього змінної $x_6$.

---

Введення в модель лінійного програмування нового виду діяльності, як видно з наведеного вище прикладу, можна розглядати як узагальнення ситуації, коли відбувається зміна у векторі ресурсів $\vec{P}_j$, які використовуються для *існуючої* діяльності. Тому зміна параметрів існуючого виду діяльності окремо ми не розглядаємо.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. За якими правилами визначається двоїста задача на основі стандартної форми прямої задачі?
2. Загальні правила, що визначають тип оптимізації і обмежень двоїстої задачі.
3. Як можна визначити оптимальний розв'язок двоїстої задачі із симплексної таблиці прямої задачі?
4. Яке співвідношення між цільовими функціями прямої і двоїстої задач?
5. Чим визначається стабільність стану економічної системи?
6. Яка економічна інтерпретація умови оптимальності в задачі максимізації?
7. Двоїсті умови допустимості і оптимальності розв'язків в двоїстому симплексному методі.
8. Матричне представлення базисних розв'язків.
9. Як можна класифікувати зміни коефіцієнтів вихідної задачі при аналізі чутливості оптимального розв'язку? Накресліть схему за даною класифікацією.

## Вправи

5.1. Запишіть двоїсті задачі для наступних прямих задач лінійного програмування:

а) $z = -5x_1 + 2x_2 \to \max$,

$-x_1 + x_2 \le -2$,

$2x_1 + 3x_2 \le 5$,

$x_1, x_2 \ge 0$.

б) $z = 6x_1 + 3x_2 \to \min$,

$6x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 2$,

$3x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 5$,

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

в) $z = 5x_1 + 6x_2 \to \max$,

$x_1 + 2x_2 = 5$,

$-x_1 + 5x_2 \ge 3$,

$x_1$ – без обмеження по знаку,

$x_2 \le 0$.

г) $z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \min$,

$x_1 + x_2 \ge 10$,

$x_1 \ge 0$,

$x_2 \le 0$,

$x_3 \ge 0$.

д) $z = x_1 + x_2 \to \max$,

$2x_1 + x_2 = 5$,

$3x_1 - x_2 = 6$,

$x_1, x_2$ – без обмеження по знаку.

е) $z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min$,

$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4$,

$2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2$,

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

5.2. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30,$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \le 40,$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі задовольняє рівняння (одержано з нульового рядка симплексної таблиці):

$$z + 0x_1 + 23x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 0x_5 = 150.$$

Запишіть відповідну двоїсту задачу і знайдіть її оптимальний розв'язок, виходячи з наведеного рівняння.

5.3. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3,$$

$$2x_1 - x_2 = 4,$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Запишіть відповідну двоїсту задачу та використовуючи інформацію, що оптимальний базисний розв'язок цієї задачі містить змінні $x_1$ і $x_3$, знайдіть розв'язок двоїстої задачі.

5.4. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \to \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Використовуючи двоїсту задачу, переконайтесь, що базисний розв'язок $(x_1, x_2)$ не є оптимальним.

5.5. У попередній вправі рівняння, отримане з нульового рядка оптимальної симплексної таблиці, має наступний вид:

$$z + 2x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 16.$$

Знайдіть оптимальний розв'язок відповідної двоїстої задачі.

5.6. За допомогою двоїстої задачі знайдіть допустимий розв'язок наступної системи нерівностей:

$$2x_1 + 3x_2 \le 12,$$

$$-3x_1 + 2x_2 \le -4,$$

$$3x_1 - 5x_2 \le 2,$$

$x_1$ – без обмеження по знаку,

$$x_2 \ge 0.$$

(*Порада*. Додайте до цієї системи нерівностей тривіальну цільову функцію $z = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \to \max$ і розв'яжіть двоїсту задачу).

5.7. Знайти оптимальне значення цільової функції наступної задачі, використовуючи тільки властивості її двоїстої задачі (тобто не застосовуючи симплексний метод до двоїстої задачі):

$$z = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \min,$$

$$5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 50,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

5.8. Визначіть інтервали зміни цільової функції в наступних задачах лінійного програмування:

а) $z = 5x_1 + 2x_2 \to \min,$

$x_1 - x_2 \geq 3,$

$2x_1 + 3x_2 \geq 5,$

$x_1, x_2 \geq 0.$

б) $z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \max,$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3,$

$2x_1 - x_2 = 4,$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

в) $z = 2x_1 + x_2 \to \max,$

$x_1 - x_2 \leq 10,$

$2x_1 \leq 40,$

$x_1, x_2 \geq 0.$

г) $z = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$

$2x_1 + 3x_2 \leq 3,$

$3x_1 + 4x_2 \geq 12,$

$x_1, x_2 \geq 0.$

5.9. Компанія виготовляє шкіряні чохли і сумки. На виробництво одного чохла треба 8 м$^2$ шкіри і 12 годин робочого часу, на виробництво сумки – 2 м$^2$ шкіри і 5 годин робочого часу. Щотижневі ресурси виробництва обмежені 1200 м$^2$ шкіри і 1850 годинами робочого часу. Компанія продає чохли і сумки за цінами €350 і €130 відповідно. Визначіть для цієї компанії схему виробництва, яка максимізує прибуток. Припустимо, що компанія має намір розширити своє виробництво. Яка максимальна ціна, за якою компанії є сенс закуповувати додаткову шкіру? А яка допустима максимальна ціна додаткових трудових ресурсів?

5.10. Компанія використовує токарні і свердлильні верстати для виробництва чотирьох типів деталей: Д1, Д2, Д3 і Д4. В наступній таблиці подані технологічні дані, які характеризують виробництво цих деталей:

| Верстат | Час обробки одного виробу (хв.) | | | | Фонд машинного часу (хв.) |
|---|---|---|---|---|---|
| | Д1 | Д2 | Д3 | Д4 | |
| Токарний | 2 | 5 | 3 | 4 | 5300 |
| Свердлильний | 3 | 4 | 6 | 4 | 5300 |
| Прибуток від одного виробу (€) | 3 | 6 | 5 | 4 | |

Для тих виробів, які не ввійдуть в оптимальний базисний розв'язок, визначіть степінь зменшення оптимального прибутку при збільшені їх виробництва на одиницю.

5.11. Розгляньте оптимальний розв'язок задачі з попередньої вправи. Компанія підрахувала, що за допомогою спеціальних заходів можна зменшити загальний час виробництва виробів, які не ввійшли в оптимальний базисний розв'язок, на 20%. Чи буде після цього виробництво таких виробів рентабельно? Якщо ні, то на скільки треба скоротити час виробництва даних виробів?

5.12. Розв'яжіть наступні задачі за допомогою двоїстого симплексного методу:

а) $z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$,

$2x_1 + 2x_2 \le 30$,

$x_1 + 2x_2 \ge 10$,

$x_1, x_2 \ge 0$.

б) $z = 5x_1 + 6x_2 \to \min$,

$x_1 + x_2 \ge 2$,

$4x_1 + x_2 \ge 4$,

$x_1, x_2 \ge 0$.

в) $z = 4x_1 + 2x_2 \to \min$,

$x_1 + x_2 = 1$,

$3x_1 - x_2 \geq 2$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

г) $z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$,

$2x_1 + x_2 \geq 3$,

$x_1 + x_2 = 2$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

(*Порада.* Замініть обмеження рівность двома нерівностями).

5.13. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 30,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 60,$$

$$x_1 + 4x_2 + x_6 = 20,$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Перевірте оптимальність і допустимість наступних базисних розв'язків:

а) $\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix}$, $\vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $\vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

в) $\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix}$, $\vec{B}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.14. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = 4x_1 + 14x_2 \to \max,$$

$$2x_1 + 7x_2 + x_3 = 21,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Перевірте оптимальність і допустимість наступних базисних розв'язків:

а) $\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$;

в) $\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $\vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{45} & -\frac{2}{45} \\ -\frac{2}{45} & \frac{7}{45} \end{pmatrix}$;

г) $\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

5.15. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = 2x_1 + x_2 \to \min,$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 3,$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 3,$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, 5).$$

Обчисліть симплексну таблицю, яка відповідає наступному базисному розв'язку, і перевірте його оптимальність та допустимість:

$$\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}, \ \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.16. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to \max,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10,$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Знайдіть найкращий розв'язок серед наступних базисних допустимих розв'язків та встановіть чи присутній серед них оптимальний:

а) $\vec{X}_B \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$;

б) $\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \ \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

в) $\vec{X}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \vec{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

5.17. В наступній таблиці представлений оптимальний розв'язок задачі максимізації з трьома обмеженнями типу „$\leq$" і невід'ємними змінними $x_1$ і $x_2$. Змінні $x_3$, $x_4$ і $x_5$ є додатковими змінними, що відповідають обмеженням задачі. Двома різними способами, використовуючи цільові функції прямої і двоїстої задач, знайдіть оптимальне значення цільової функції вихідної задачі.

| № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $z$ | ? | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 |
| 1 | $x_3$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | –1 |
| 2 | $x_2$ | 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | 0 | –1 | 1 |

5.18. Розгляньте наступну задачу лінійного програмування:

$$z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le b_1,$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \le b_2,$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Визначіть значення констант $b_1$ і $b_2$, при яких симплексна таблиця з оптимальним розв'язком має наступний вид:

| № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $z$ | 150 | 0 | $a$ | 7 | $d$ | $e$ |
| 1 | $x_1$ | 30 | 1 | $b$ | 2 | 1 | 0 |
| 2 | $x_5$ | 10 | 0 | $c$ | –8 | –1 | 1 |

Константи $a$, $b$, $c$, $d$ і $e$ можна знайти на основі даних вихідної задачі і умов оптимальності та допустимості розв'язку, який представлений в симплексній таблиці.

Знайдіть значення правих частин нерівностей вихідної задачі $b_1$ і $b_2$, оптимальний розв'язок двоїстої задачі та значення констант $a$, $b$ і $c$, які відповідають змінній $x_2$.

5.19. Птахофабрика тримає 20 000 курчат, які вирощуються віком до восьми тижнів і потім відправляються до ринку. В наступній таблиці подано тижневі витрати корму на одне курча, в залежності від його віку:

| Тиждень | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Витрати корму (кг) | 0.13 | 0.24 | 0.375 | 0.50 | 0.65 | 0.80 | 0.95 | 1.05 |

Для того, щоб курчата до 8-го тижня змогли досягти певної ваги, їх раціон повинен задовольняти певним вимогам до калорійності і якісному складу (в задачі вони спрощенні). В наступній таблиці наведені узагальнені дані по вмісту трьох показників (кальцій, білок і клітковина) у кормових інгредієнтах:

| Інгредієнт | Вміст речовин (кг/кг інгредієнту) | | | Вартість (грн/кг) |
|---|---|---|---|---|
| | Кальцій | Білок | Клітковина | |
| Вапняк | 0.380 | 0.00 | 0.00 | 0.24 |
| Зерно | 0.001 | 0.09 | 0.02 | 0.90 |
| Соєве борошно | 0.002 | 0.50 | 0.08 | 3.20 |

Кормовий раціон повинен містити: кальцію – не менше 8% і не більше 12%; білку – не менше 22%; клітковини – не більше 5%. Складіть оптимальний кормовий раціон для кожного тижня.

5.20. Нехай в задачі про фабрику іграшок змінні $D_2$ і $D_3$ являють собою зміни фондів робочого часу другої і третьої операцій.

1) Визначіть інтервали для $D_2$ і $D_3$, які гарантують допустимість поточного розв'язку. Припускається, що зміни фондів робочого часу кожної операції виконуються окремо.
2) Визначіть вартість однієї хвилини фондів робочого часу другої і третьої операцій.
3) Нехай фонд робочого часу другої операції змінений від поточного значення 460 хв. до 500 хв. Знайдіть новий оптимальний розв'язок і визначте відповідне значення цільової функції.
4) Нехай фонд робочого часу третьої операції змінений від поточного значення 420 хв. до 450 хв. Знайдіть новий оптимальний розв'язок і визначіть відповідну зміну цільової функції.

5) Нехай фонд робочого часу третьої операції змінений від поточного значення 420 хв. до 380 хв. Знайдіть новий оптимальний розв’язок і визначіть відповідну зміну цільової функції.

5.21. Нехай в задачі про фабрику іграшок зміни $D_1$, $D_2$ і $D_3$ фондів робочого часу всіх операцій робляться одночасно.

1) Накладіть умови на змінні $D_1$, $D_2$ і $D_3$, які гарантують допустимість поточного оптимального розв’язку.

2) Нехай фонди робочого часу всіх трьох операцій змінені до 438, 500 і 410 хв. відповідно. На основі умови, яку знайдено у попередньому пункті, покажіть, що поточний базисний розв’язок залишиться допустимим. За допомогою двоїстих цін знайдіть зміну цільової функції.

3) Нехай фонди робочого часу всіх трьох операцій змінені до 460, 440 і 380 хв. відповідно. На основі умови, знайденої у п. 1), покажіть, що поточний базисний розв’язок буде недопустимим. За допомогою двоїстого симплексного методу знайдіть новий оптимальний розв’язок.

5.22. Компанія виготовляє дві моделі електронних пристроїв, при виготовлені яких використовуються резистори, конденсатори і мікросхеми. У наступній таблиці наведені дані, які характеризують виробництво цих моделей:

| Ресурс | Кількість комплектуючих на один виріб | | Ліміт комплектуючих |
|---|---|---|---|
| | Модель 1 | Модель 2 | |
| Резистор | 2 | 3 | 1200 |
| Конденсатор | 2 | 1 | 1000 |
| Мікросхема | 0 | 4 | 800 |
| Прибуток на один виріб (€) | 3 | 4 | |

Позначимо через $x_1$ і $x_2$ кількість виготовлених пристроїв моделей 1 і 2 відповідно. Нижче наведена сформульована задача лінійного програмування і відповідна симплексна таблиця з її оптимальним розв'язком.

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 1200,$$

$$2x_1 + x_2 \le 1000,$$

$$4x_1 \le 800,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

| № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $z$ | 1750 | 0 | 0 | 5/4 | 1/4 | 0 |
| 1 | $x_1$ | 450 | 1 | 0 | –1/4 | 3/4 | 0 |
| 2 | $u_3$ | 400 | 0 | 0 | –2 | 2 | 1 |
| 3 | $x_2$ | 100 | 0 | 1 | 1/2 | –1/2 | 0 |

1) Визначіть статус кожного ресурсу.
2) В термінах оптимального прибутку визначіть вартість одного резистора, одного конденсатора і однієї мікросхеми.
3) Знайдіть інтервал застосування двоїстих цін для кожного ресурсу.
4) Знайдіть новий оптимальний розв'язок при умові зростання кількості доступних резисторів до 1300.
5) Якщо кількість доступних мікросхем буде зменшена до 350, чи можна буде знайти новий оптимальний розв'язок безпосередньо з наведеної вище інформації? Обґрунтуйте свою відповідь.
6) У п. 3) був визначений інтервал допустимості для доступної кількості конденсаторів. На основі цих даних визначіть інтервал зміни оптимального прибутку і відповідні інтервали змін кількостей першої і другої моделей.
7) Новий контракт дозволяє компанії закупити додаткову кількість резисторів за ціною 4 грн. за одиницю, але при умові, що закупівельна партія буде не менше 500 одиниць. Чи вигідний компанії такий контракт?

5.23. Компанія для виробництва двох видів продукції має щоденний фонд робочого часу 320 годин і 350 одиниць сировини. При необхідності компанія може дозволити 10 годин понаднормової роботи з оплатою €2 за годину. На виготовлення однієї одиниці продукції першого виду треба 1 годину робочого часу і 3 одиниці сировини, а на виготовлення однієї одиниці продукції другого виду – 2 години робочого часу і 1 одиниця сировини. Прибуток від однієї одиниці продукції складає відповідно €10 і €12. Позначимо через $x_1$ і $x_2$ щоденні об'єми виробництва продукції першого і другого виду, а через $x_3$ – кількість використаних понаднормових годин. Нижче наведена сформульована задача лінійного програмування і відповідна симплексна таблиця з оптимальним розв'язком.

$$z = 10x_1 + 12x_2 - 2x_3 \to \max,$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \le 320,$$

$$3x_1 + x_2 \le 350,$$

$$x_3 \le 10,$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

| № рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $z$ | 2256 | 0 | 0 | 0 | 26/5 | 8/5 | 16/5 |
| 1 | $x_2$ | 128 | 0 | 1 | 0 | 3/5 | –1/5 | 3/5 |
| 2 | $x_1$ | 74 | 1 | 0 | 0 | –1/5 | 2/5 | –1/5 |
| 3 | $x_3$ | 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

1) Знайдіть оптимальний розв'язок цієї задачі.
2) Визначіть двоїсті ціни ресурсів та їх інтервали допустимості.
3) Знайдіть двоїсті ціни для фонду робочого часу і понаднормових робіт. Чи могуть ці ціни бути однаковими? Обґрунтуйте.

4) Компанія може збільшити об'єм понаднормових робіт за додаткову плату €2 за годину. Скільки годин такої понаднормової роботи може ввести компанія?

5) Компанія щоденно може отримати додатковий об'єм сировини в 100 одиниць за ціною €1,50. Чи варто компанії використати цей резерв сировини? А якщо вартість додаткової сировини буде €2 за одиницю?

6) Припустимо, що компанія змушена скоротити складські площі для сировини і тому щоденно не може використовувати більше 200 одиниць сировини. Знайдіть для цього випадку новий оптимальний розв'язок.

7) Припустимо, що компанія не може щоденно використовувати більше 8 годин понаднормової роботи. Знайдіть новий оптимальний розв'язок.

5.24. Дана наступна задача лінійного програмування:

$$z = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$2x_1 + x_2 \le 6,$$

$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1) Покажіть, що оптимальний базисний розв'язок містить обидві змінні $x_1$ і $x_2$, та, що інтервали для правих частин обмежень, які отримані у припущені їх незалежності, мають вигляд: $-3 \le D_1 \le 6$; $-3 \le D_2 \le 6$.

2) Припустимо, що праві частини обмежень одночасно збільшуються на величину $\Delta > 0$. Спочатку доведіть, що базисний розв'язок залишається допустимим для всіх $\Delta > 0$. Далі покажіть, що достатнє правило допустимості дає правильну відповідь тільки тоді, коли $0 < \Delta < 3$, не дає відповіді при $3 \le \Delta \le 6$, і не можна застосувати коли $\Delta > 6$.

5.25. Нехай в моделі фабрики іграшок час виконання четвертої операції складає відповідно 4, 1 і 2 хвилини при складанні однієї іграшки різних видів. Знайдіть оптимальний розв'язок задачі у припущенні, що фонд робочого часу четвертої операції складає а) 570 хвилин; б) 548 хвилин.

5.26. ***Побічні обмеження***. Замість розв'язання задачі лінійного програмування, з урахуванням всіх обмежень, можна спочатку визначити так званні *побічні обмеження* і на першому етапі розв'язання задачі виключити їх з розгляду. Побічними обмеженнями є ті, які, як ми підозрюємо, лише у малій степені впливають (або зовсім не впливають) на оптимальний розв'язок. Після визначення такі обмеження виключаються з множини обмежень задачі, і далі розв'язується задача тільки з обмеженнями, що залишились. Потім по черзі перевіряються побічні обмеження. Якщо отриманий оптимальний розв'язок задовольняє побічному обмеженню, таке обмеження відкидається зовсім. У протилежному випадку воно вводиться у систему обмежень задачі і шукається новий оптимальний розв'язок. Цей процес виконується до тих пір, доки не вичерпаються всі побічні обмеження.

Застосуйте описану процедуру до наступної задачі лінійного програмування:

$$z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 50,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \le 20,$$

$$7x_1 + 6x_2 - 9x_3 \le 90,$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 35,$$

$$12x_1 + 6x_2 \le 90,$$

$$x_2 - 9x_3 \le 20,$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

5.27. Перевірте оптимальність розв'язку задачі про фабрику іграшок для наступних цільових функцій. Якщо розв'язок неоптимальний, то знайдіть новий оптимальний розв'язок. (Симплексна таблиця з оптимальним розв'язком для даної задачі представлена на початку параграфу 5.6).

1) $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$.

2) $z = 3x_1 + 6x_2 + x_3$.

3) $z = 8x_1 + 3x_2 + 9x_3$.

5.28. Нехай в задачі про фабрику іграшок коефіцієнти цільової функції зазнали наступних змін (кожна зміна розглядається як окрема задача):

1) Прибуток від однієї моделі літака складає $3 + d_1$ грн.

2) Прибуток від однієї моделі вантажівки – $2 + d_2$ грн.

3) Прибуток від однієї моделі легкового автомобіля – $5 + d_3$ грн.

Зміни $d_1$, $d_2$ і $d_3$ можуть бути як додатні, так і від'ємні. Застосовуючи умову оптимальності до різниць $z_j - c_j$, визначить інтервали для величин $d_1$, $d_2$ і $d_3$, які зберігають поточний оптимальний розв'язок.

5.29. В задачі про фабрику іграшок, використовуючи розв'язок з попередньої вправи, вкажіть чи буде поточний розв'язок оптимальним для наступних (незалежних) ситуацій. Якщо розв'язок зміниться, то знайдіть новий.

1) Прибуток від однієї моделі літака зріс від 3 грн. до 5 грн.; від 3 до 8 грн.

2) Прибуток від однієї моделі літака зменшився від 3 грн. до 2 грн.

3) Прибуток від однієї моделі вантажівки збільшився від 2 грн. до 6 грн.

4) Прибуток від однієї моделі легкового автомобіля зменшився від 5 грн. до 2 грн.

5.30. Припустимо, що у вихідній моделі фабрики іграшок час виконання трьох складальних операцій при виробництві моделей літаків зменшено відповідно до 0.5, 1 і 0.5 хвилин. Прибуток від моделі цього виду залишився незмінним на рівні 3 грн. за одну іграшку. Знайдіть новий оптимальний розв'язок.

5.31. Нехай в моделі фабрики іграшок виробництво моделі нового виду (модель пожежної машини) вимагає відповідно 1, 2 і 3 хвилини для виконання кожної складальної операції. Знайдіть оптимальний розв'язок, якщо прибуток від однієї моделі нового виду складає: а) 5 грн.; б) 10 грн.

5.32. Компанія виготовляє три види продукції: П1, П2 і П3. У виробничому процесі використовуються матеріали М1 і М2, які обробляються на верстатах В1 і В2. В наступній таблиці наведені дані, які характеризують виробничий процес виготовлення продукції:

| Ресурси | Одиниці виміру | К-ть ресурсів на одиницю виробу | | | Щоденний фонд ресурсів |
|---|---|---|---|---|---|
| | | П1 | П2 | П3 | |
| Час роботи верстата В1 | Хвилини | 1 | 2 | 1 | 430 |
| Час роботи верстата В2 | Хвилини | 3 | 0 | 2 | 460 |
| Матеріал М1 | Кг | 1 | 4 | 0 | 420 |
| Матеріал М2 | Кг | 1 | 1 | 1 | 300 |

Щоденний об'єм виробництва виробу П2 повинен бути не менше 70 одиниць, а виробу П3 – не більше 240 одиниць. Прибуток на одиницю виробу П1, П2 і П3 складає відповідно 300, 200 і 500 грн.

Керівництво компанії розробляє стратегію для покращення свого фінансового стану. Поступили наступні пропозиції:

1) Можна збільшити на 20% прибуток від виробу П3, але при цьому зменшиться об'єм його виробництва до 210 одиниць.
2) Матеріал М2 є критичним фактором, який обмежує поточне виробництво. Можна придбати додаткові об'єми цього матеріалу у сторонніх постачальників, але його ціна за 1 кг буде на 3 грн. вище, ніж у постачальників, які обслуговують компанію.

3) Фонд робочого часу верстатів можна збільшити на 40 хвилин в робочий день, однак таке збільшення приведе до додаткової вартості експлуатації кожного верстату – 35 грн. в день.
4) Відділ маркетингу обґрунтував необхідність збільшення мінімального об’єму виробництва продукту П2 з 70 одиниць до 100 одиниць.
5) Час обробки одиниці виробу П1 на верстаті В2 можна зменшити до 2 хвилин з додатковою вартістю 4 грн. в робочий день.

Розгляньте доцільність впровадження цих пропозицій, враховуючи, що деякі з них можна впровадити одночасно.

# РОЗДІЛ 6
# ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

## 6.1. ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ І ОСОБЛИВОСТІ ЇЇ СТРУКТУРИ

Симплексний метод є універсальним методом розв'язування задач лінійного програмування з неперервними аргументами. Проте окремі типи задач лінійного програмування мають такі особливості структури, що дають змогу побудувати значно простіші за симплексний методи розв'язування. Але, як би зовні ці методи не відрізнялись від симплексного, останній є їх незмінною основою, так що при більш уважному аналізі завжди можна виявити його основні елементи, що дає можливість вважати всі методи розв'язування задач лінійного програмування більш-менш глибокою модифікацією симплексного методу.

Найважливішим типом згаданих задач є так звана транспортна задача. Математична структура цієї задачі характерна для великого класу задач лінійного програмування, що називаються *розподільчими*, а реальний зміст їх може бути найрізноманітнішим, зовсім не зв'язаним із задачею про перевезення вантажів.

Отже, треба розрізняти зміст термінів „транспортна задача" і „задача транспортного типу". Перший термін означатиме назву класичної транспортної задачі, в якій мова йде про найраціональніші з економічного погляду способи перевезення певного однорідного продукту від виробника до споживача. Під терміном „однорідний продукт" розуміємо такий продукт або виріб, який має однакові якість і призначення. Наприклад, мова може йти про перевезення сталі з металургійних заводів до споживачів, цукрових буряків з певних плантацій до цукрових заводів і т. п.

Другим терміном (задача транспортного або розподільчого типу) називають такі задачі лінійного програмування, які мають однакову з класичною транспортною задачею математичну модель, але конкретний зміст яких нічого спільного з класичною транспортною задачею не має. Прикладом таких задач можуть бути задача оптимального добору, задачі розміщення виробництва, баз та складів, задача про призначення і т. п.

Слід зауважити, що і власне транспортні задачі за своїм змістом поділяються на кілька груп. Як правило, критерієм поділу є критерій оптимальності цільової функції задачі, а саме: задачі на мінімізацію вартості перевезень, задачі на мінімізацію строків перевезень, задачі на мінімізацію довжини маршрутів тощо.

Запишемо транспортну задачу на мінімізацію загальної вартості перевезень, яка стала вже класичною.

Нехай є $m$ пунктів відправлення $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (постачальники), в яких зосереджені запаси деякого однорідного вантажу у кількості відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ одиниць. Є $n$ пунктів призначення $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (споживачі), які подають замовлення відповідно на $b_1, b_2, \ldots, b_n$ одиниць вантажу.

Відомі вартості $c_{ij}$ перевезень одиниці вантажу від кожного пункту відправлення $A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ до кожного пункту призначення $B_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, які задані в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

| Пункти відправлення | Пункти споживання | | | | | Запаси |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | ... | $B_j$ | ... | $B_n$ | |
| $A_1$ | $c_{11}$ | ... | $c_{ij}$ | ... | $c_{1n}$ | $a_1$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $A_i$ | $c_{i1}$ | ... | $c_{ij}$ | ... | $c_{in}$ | $a_i$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $A_m$ | $c_{m1}$ | ... | $c_{mj}$ | ... | $c_{mn}$ | $a_m$ |
| Потреби | $b_1$ | ... | $b_j$ | ... | $b_n$ | |

Всі числа $c_{ij}$ утворюють матрицю, яка називається *матрицею вартостей перевезень* $(c_{ij})_{m\times n}$:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Вважається, що вартість перевезення декількох одиниць вантажу пропорційна їх кількості.

Треба скласти такий план перевезень (звідки, куди і скільки одиниць везти), щоб всі заявки були максимально виконані (повне виконання можливе лише при сумарній кількості запасів більше або рівній сумарній кількості заявок), а загальна вартість всіх перевезень була мінімальною.

Позначимо $x_{ij}$ – кількість одиниць вантажу, який відправляється з $i$-го пункту відправлення $A_i$ в $j$-й пункт призначення $B_j$. Невід’ємні змінні $x_{ij}$ також можна записати у вигляді матриці

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

яка називається *матрицею перевезень* $(x_{ij})_{m\times n}$.

Величини $x_{ij}$, які підлягають визначенню, називаються *перевезеннями*; $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ – *вектором запасів*; $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – *вектором потреб*.

В залежності від співвідношення між запасами вантажу і сумарними потребами в ньому транспортні задачі можуть бути закритими і відкритими.

Якщо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{6.3}$$

то задача називається *закритою* або *транспортною задачею з правильним балансом*. Якщо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{6.4}$$

то *відкритою* або *транспортною задачею з неправильним балансом*.

Розглянемо закриту транспортну задачу.

Сумарна кількість вантажу, який відправляється з кожного пункту відправлення у всі пункти призначення, повинна дорівнювати запасу вантажу в даному пункті. Це дасть $m$ умов-рівнянь:

$$\begin{aligned} & x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ & x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Сумарна кількість вантажу, який доставляється у кожен пункт призначення з усіх пунктів відправлення, повинна дорівнювати заявці, яка подана даним пунктом. Це дає $n$ умов-рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\
&x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n.
\end{aligned} \tag{6.6}
$$

Сумарна вартість усіх перевезень повинна бути мінімальною:

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min. \tag{6.7}$$

Таким чином, математичну модель закритої транспортної задачі коротко можна записати у вигляді

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

$$x_{ij} \ge 0, \ (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Перш за все відмітимо, що система основних умов-рівнянь (6.5), (6.6) не є лінійно незалежною, так як їх праві частини зв'язані умовою (6.3). Число лінійно незалежних рівнянь дорівнює $m + n - 1$, тобто число базисних змінних буде рівним $m + n - 1$, а число вільних змінних

$$k = mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1).$$

Зазначимо, що кожна змінна $x_{ij}$ задачі входить у систему основних умов лише двічі: один раз у підсистему (6.5), другий – у підсистему (6.6).

Другою важливою особливістю транспортної задачі є те, що елементи матриці умов задачі – суть одиниці і нулі, причому кожний стовпчик матриці має лише по дві одиниці, решта елементів дорівнюють нулю, кожен рядок $n$ або $m$ одиниць, а решта елементів – нулі.

Зауважимо, що на практиці для зручності, задаючи конкретну транспортну задачу, записують одну таблицю, в яку поміщають плани і вартості перевезень. Домовляються, наприклад, що вартості перевезень поміщають у клітинах таблиці плану перевезень у правому верхньому кутку, обведеному прямокутником. Крім того, в таблиці спрощено подають наявності ресурсів і заявки. Отже, робочий вигляд об'єднаної таблиці (6.1) і (6.2) в загальному випадку буде такий:

Таблиця 6.2

| $A_i$ \ $B_j$ | $b_1$ | $b_2$ | . . . | $b_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $\boxed{c_{11}}$ $x_{11}$ | $\boxed{c_{12}}$ $x_{12}$ | . . . | $\boxed{c_{1n}}$ $x_{1n}$ |
| $a_2$ | $\boxed{c_{21}}$ $x_{21}$ | $\boxed{c_{22}}$ $x_{22}$ | . . . | $\boxed{c_{2n}}$ $x_{2n}$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| $a_m$ | $\boxed{c_{m1}}$ $x_{m1}$ | $\boxed{c_{m2}}$ $x_{m2}$ | . . . | $\boxed{c_{mn}}$ $x_{mn}$ |

## 6.2. Знаходження опорних планів транспортної задачі

Кожна транспортна задача розв'язується за тією самою схемою, що й будь-яка задача лінійного програмування симплексним методом, а саме: 1) знаходимо спочатку будь-який базисний невід'ємний розв'язок (опорний план); 2) перевіряємо, чи буде знайдений розв'язок оптимальним; 3) якщо знайдений розв'язок не оптимальний, то виконуємо кілька кроків заміни, які приводять до оптимального розв'язку. Однак наявність великої кількості змінних і обмежень робить обчислення симплексним методом громіздкими. В силу особливої структури транспортної задачі при її розв'язуванні не треба довго і нудно знаходити розв'язок системи рівнянь. Всі операції по знаходженню оптимального плану зводяться до маніпуляцій з таблицею. Це вже можна помітити на прикладі відшукання опорних планів. Заповнюють клітки матриці перевезень $A_iB_j$ меншим з чисел її рядка і стовпчика, тобто числом $\min(a_i, b_j)$.

Розглянемо три методи знаходження опорних розв'язків.

**1. Діагональний метод (або метод північно-західного кута)**

Цей найпростіший метод полягає в тому, що розподіляються ресурси постачальників і задовольняються потреби споживачів у тому порядку, в якому записано в таблиці: спочатку розподіляються ресурси першого пункту відправлення $A_1$, намагаючись повністю задовольнити за його рахунок перші пункти відправлення $B_1, B_2, \ldots, B_n$, наскільки це можливо. Вичерпавши ресурси пункту відправлення $A_1$, розподіляють ресурси пункту $A_2$ за тим самим принципом: задовольняються потреби дальших (як записано в таблиці) пунктів призначення, які не вдалося задовольнити за рахунок пункту відправлення $A_1$, і доти, поки не будуть розподілені всі ресурси всіх пунктів відправлення $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Таким чином заповнення клітин таблиці починається з крайньої в лівому верхньому кутку клітини, з „північно-західного кута", і продовжується в напрямі діагоналі таблиці до крайньої клітини в правому нижньому кутку. Розглянемо застосування цього методу на наступному прикладі:

$$\vec{a} = (60; 35; 40),\ \vec{b} = (22; 45; 20; 18; 30),\ C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Першою заповнюють клітину $A_1B_1$ числом 22, як $\min(22, 60)$. В результаті такої дії потреби пункту $B_1$ задовольнилися повністю, а запаси $A_1$ зменшилися до 60-22=38 од. Цим числом заповнюють клітину $A_1B_2$.

Таблиця 6.3

| $A_i \backslash B_j$ | 22 | 45 | 20 | 18 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 22 (4) | 38 (1) | (3) | (4) | (4) |
| 35 | (2) | 7 (3) | 20 (2) | 8 (2) | (3) |
| 40 | (3) | (5) | (2) | 10 (4) | 30 (4) |

У подальших розрахунках вже використовують запаси пунктів $A_2$ і $A_3$. Так, клітку $A_2B_2$ заповнюють числом 7 $(\min(45-38;35))$ і т. д. В результаті таких послідовних дій дістають початковий опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 22 & 38 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 20 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 30 \end{pmatrix}.$$

**2. Метод найменшої вартості**

Метод найменшої вартості відрізняється від діагонального методу послідовністю заповнення клітин. Починають заповнювати ті клітки таблиці, де вартості перевезення на даному етапі є мінімальними (таблиця 6.4).

Таблиця 6.4

| $A_i \backslash B_j$ | 22 | 45 | 20 | 18 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | (4) | 45 (1) | (3) | (4) | 15 (4) |
| 35 | 22 (2) | (3) | 13 (2) | (2) | (3) |
| 40 | (3) | (5) | 7 (2) | 18 (4) | 15 (4) |

Найменша вартість в клітині $A_1B_2$, тому заповнюють її. Наступна менша вартість 2, в клітинах $A_2B_1$, $A_2B_3$, $A_2B_4$ і $A_3B_3$. Можна вибрати будь-яку із цих клітин, наприклад $A_2B_1$, потім $A_2B_3$, $A_3B_3$. Клітку $A_2B_4$ не заповнюємо, тому що запаси пункту $A_2$ вичерпано. Вибирають клітину $A_3B_4$ з меншою вартістю 4 (всі клітки з вартістю 3 не заповнюються, тому що відповідні запаси вичерпані).

**3. Метод усереднених коефіцієнтів**

За методом усереднених коефіцієнтів обчислюють середні вартості рядків і стовпчиків матриці перевезення:

$$c_i = \frac{1}{n}\left(c_{i1} + c_{i2} + \ldots + c_{in}\right),\ c_j = \frac{1}{m}\left(c_{1j} + c_{2j} + \ldots + c_{mj}\right).$$

Після цього обчислюють усереднені коефіцієнти $k_{ij}$ за формулами

$$k_{ij} = c_{ij} - \left(c_i + c_j\right).$$

Потім заповнюють клітини з найменшими значеннями коефіцієнтів $k_{ij}$ (таблиця 6.5).

Таблиця 6.5

| $A_i$ \ $B_j$ | 22 | 45 | 20 | 18 | 30 | $c_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | -2,2 4 | -5,2 1<br>**45** | -2,5 3 | -2,5 4 | -2,9 4<br>**15** | 3,2 |
| 35 | -3,4 2<br>**2** | -2,4 3 | -2,7 2 | -3,7 2<br>**18** | -3,1 3<br>**15** | 2,4 |
| 40 | -3,6 3<br>**20** | -1,6 5 | -3,9 2<br>**20** | -2,9 4 | -3.3 4 | 3,6 |
| $c_j$ | 3 | 3 | 2,3 | 3,3 | 3,7 | |

Обчислимо загальні вартості перевезення опорних планів, знайдених різними методами:

а) за діагональним методом

$$z_1 = 4\cdot 22 + 1\cdot 38 + 3\cdot 7 + 2\cdot 20 + 2\cdot 8 + 4\cdot 10 + 4\cdot 30 = 363 \text{ од.}$$

б) за методом найменшої вартості

$$z_2 = 1\cdot 45 + 4\cdot 15 + 2\cdot 22 + 2\cdot 13 + 2\cdot 7 + 4\cdot 18 + 4\cdot 15 = 321 \text{ од.}$$

в) за методом усереднених коефіцієнтів

$z_3 = 1\cdot 45 + 4\cdot 15 + 2\cdot 2 + 2\cdot 18 + 3\cdot 15 + 3\cdot 20 + 2\cdot 20 = 290$ од.

Отже, найбільш близький до оптимального плану буде початковий опорний план, знайдений методом усереднених коефіцієнтів. Діагональний метод зазвичай застосовується при розв'язуванні транспортних задач на ЕОМ.

## 6.3. Метод потенціалів знаходження розв'язків транспортної задачі

Широко поширеним методом розв'язування транспортних задач є метод потенціалів.

Якщо допустимий розв'язок $X = \left(x_{ij}\right)_{m\times n}$ транспортної задачі є оптимальним, то існують *потенціали* (числа) пунктів відправлення $u_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ і пунктів призначення $v_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, які задовольняють наступним умовам:

$u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$ (тобто для базисних клітин таблиці), (6.8)

$u_i + v_j \le c_{ij}$ при $x_{ij} = 0$ (тобто для вільних клітин таблиці). (6.9)

Група рівностей (6.8) використовується як система рівнянь для знаходження потенціалів. Дана система рівнянь має $m+n$ невідомих $u_i$, $v_j$. Кількість рівнянь системи, як і кількість базисних змінних, дорівнює $m+n-1$. Так як кількість невідомих системи на одиницю більше кількості рівнянь, то одній з них можна задати значення довільно, а решту знайти з системи.

Група нерівностей (6.9) використовується для перевірки оптимальності опорного розв'язку. Ці нерівності зручніше подати у наступному вигляді:

$\gamma_{ij} = c_{ij} - \left(u_i + v_j\right) \ge 0$ при $x_{ij} = 0$ (для оптимального розв'язку).

Числа $\gamma_{ij}$ називаються *оцінками* для вільних клітин таблиці транспортної задачі.

*Для того щоб опорний план був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб оцінки $\gamma_{ij}$ для вільних клітин транспортної таблиці були невід'ємними.*

Введемо деякі означення.

В транспортній задачі перехід від одного опорного плану до іншого здійснюється за допомогою циклу перерахунку.

*Циклом* в транспортній таблиці називається замкнена ламана лінія, вершини якої розміщені в клітинах і з кожної вершини виходять два відрізки: один по рядку, другий по стовпчику.

Можливі цикли, які схематично зображені на рис. 6.1.

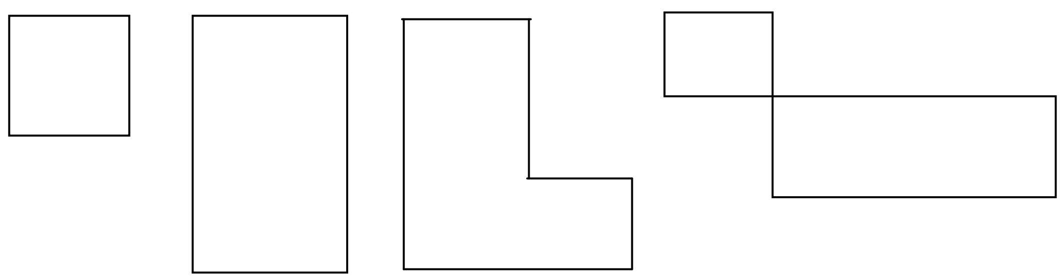


Рис. 6.1

Цикл, сусіднім вершинам якого поставлені у відповідність протилежні знаки („+”, „–”), називають *означеним*.

Означений цикл, одна вершина якого міститься у вільній клітині, а всі інші в базисних, називається *циклом перерахунку*. (У вільній клітині завжди ставлять знак „+”).

*Зсувом по циклу перерахунку* на число $\theta$ називається така операція, при якій в додатних вершинах додається одне і те саме число $\theta$, а у від'ємних віднімається.

Майже очевидними є два наступних твердження.

*Зсув за означеним циклом в транспортній таблиці перетворює один розв'язок системи обмежень в інший.*

*Для будь-якої вільної клітки транспортної таблиці існує лише один цикл перерахунку.*

Оцінки для вільних клітин транспортної таблиці використовуються при покращенні опорного розв'язку. Для цього знаходять клітину $A_l B_k$ таблиці, яка відповідає $\min(\gamma_{ij}) = \gamma_{lk}$. Якщо $\gamma_{lk} \geq 0$, розв'язок буде оптимальним. Якщо ж $\gamma_{lk} < 0$, то для клітки $A_l B_k$ будують цикл перерахунку і за допомогою зсуву переходять до нового опорного плану, в якому значення цільової функції буде меншим, ніж у попередньому.

**Особливості розв'язування транспортних задач з неправильним балансом:**

1. Якщо сумарні запаси постачальників перебільшують сумарні заявки споживачів, тобто
$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$
то необхідно ввести фіктивного $(n+1)$-го споживача з заявками $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, що дорівнюють різниці сумарних запасів постачальників та заявок споживачів, і нульовими вартостями перевезень $c_{i,n+1} = 0 \quad \forall i$.
2. Якщо сумарні заявки споживачів перебільшують сумарні запаси постачальників, тобто
$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$
то необхідно ввести фіктивного $(m+1)$-го постачальника із запасами $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, що дорівнюють різниці сумарних заявок

споживачів та запасів постачальників, і нульовими вартостями перевезень $c_{m=1,j} = 0 \quad \forall j$.

3. При складанні початкового опорного плану в останню чергу слід розподіляти запаси фіктивного постачальника і задовольняти заявки фіктивного споживача, незважаючи на те, що їм відповідає найменша вартість перевезень, яка рівна нулю (щоб не змінювалась загальна вартість перевезень).

**Алгоритм розв'язування транспортних задач методом потенціалів:**

1. Перевірити чи є дана задача закритою транспортною задачею. Якщо задача має неправильний баланс, то вводиться фіктивний постачальник або споживач з необхідною кількістю запасів або заявок і нульовими вартостями перевезень.
2. Побудувати початковий опорний розв'язок (методом найменшої вартості або яким-небудь іншим методом), перевірити вірність його побудови за кількістю базисних клітин (їх повинно бути $m+n-1$).
3. Побудувати систему потенціалів, яка відповідає опорному розв'язку. Для цього розв'язують систему рівнянь

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0,$$

яка має нескінченну множину розв'язків. Для знаходження частинного розв'язку системи одному з потенціалів (звичайно тому, якому відповідає більша кількість базисних клітин) задають довільне деяке значення (частіше нуль). Інші потенціали однозначно визначаються за формулами

$$u_i = c_{ij} - v_j \text{ при } x_{ij} > 0,$$

якщо відомий потенціал $v_j$, і

$$v_j = c_{ij} - u_i \text{ при } x_{ij} > 0,$$

якщо відомий потенціал $u_i$.

4. Перевірити виконання умови оптимальності для вільних клітин таблиці. Для цього обчислюють оцінки для всіх вільних клітин за формулами
$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$
і записують, наприклад, у круглих дужках в кожній вільній клітині. Якщо для всіх вільних кліток $\gamma_{ij} \geq 0$, то розв’язок є оптимальним і тоді обчислюють значення цільової функції та розв’язування задачі завершується. Якщо ж є хоча б одна клітина з від’ємною оцінкою, то опорний розв’язок не є оптимальним.
5. Перейти до нового опорного розв’язку, на якому значення цільової функції буде меншим. Для цього знаходять клітину таблиці задачі, якій відповідає найменша від’ємна оцінка
$$\min(\gamma_{ij}) = \gamma_{lk}\,.$$
Будують цикл перерахунку, який містить цю клітину і здійснюють зсув за означеним циклом на величину $\theta = \min\limits_{"-"}(x_{ij})$. Клітина зі знаком „–”, в якій досягається $\min\limits_{"-"}(x_{ij})$, залишається пустою. Якщо мінімум досягається в декількох клітинах, то одна з них залишається пустою, а в інших проставляються базисні нулі, для того щоб кількість базисних клітин залишалася рівною $m+n-1$.

Далі переходять до пункту 3 даного алгоритму.

---

**Приклад 6.1.** Розглянемо транспортну задачу, вихідні дані якої:
$$\vec{a} = (200;300;500),\ \vec{b} = (200;200;300;400),\ C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

*Розв’язання.* Знаходимо сумарні запаси постачальників і сумарні заявки споживачів:
$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 200 + 300 + 500 = 1000,\ \sum_{j=1}^{4} b_j = 200 + 200 + 300 + 400 = 1100\,.$$

Задача з неправильним балансом. Введемо четвертого, фіктивного постачальника із запасами $a_4 = 1100 - 1000 = 100$ і нульовими вартостями перевезень (таблиця 6.6).

Таблиця 6.6

| $A_i$ \ $B_j$ | 200 | 200 | 300 | 400 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 200 | (9) 4 | (7) 3 | (4) 2 | 1<br>200 | –11 |
| 300 | 2<br>200 | 3<br>100 – | (0) 56 | (–2)<br>+ | –4 |
| 500 | (0) 6 | + 7<br>100 | 9<br>300 | – 12<br>100 | 0 |
| 100 | (6) 0 | (5) 0 | (3) 0 | 0<br>100 | –12 |
| $v_j$ | 6 | 7 | 9 | 12 | |

Знаходимо початковий опорний розв’язок методом найменшої вартості (таблиця 6.6).

Для перевірки оптимальності опорного розв’язку необхідно знайти потенціали. Записуємо систему рівнянь для знаходження потенціалів:

$$u_1 + v_4 = 1,$$

$$u_2 + v_1 = 2,$$

$$u_2 + v_2 = 3,$$

$$u_3 + v_2 = 7,$$

$$u_3 + v_3 = 9,$$

$$u_3 + v_4 = 12,$$

$$u_4 + v_4 = 0.$$

Система рівнянь для знаходження потенціалів достатньо проста і зазвичай її розв’язують усно (саму систему можна не записувати). Будь-який невідомий потенціал, який відповідає базисній клітини, дорівнює вартості цієї клітини мінус відомий потенціал, який відповідає цій же клітині.

Система складається з семи рівнянь і має вісім невідомих. Вона невизначена. Одному з потенціалів надамо значення довільно: нехай $u_3 = 0$. Інші потенціали знаходяться однозначно:

$v_2 = 7 - u_3 = 7 - 0 = 7$, $v_3 = 9 - u_3 = 9 - 0 = 9$, $v_4 = 12 - u_3 = 12 - 0 = 12$,

$u_1 = 1 - v_4 = 1 - 12 = -11$, $u_4 = 0 - v_4 = 0 - 12 = -12$,

$u_2 = 3 - v_2 = 3 - 7 = -4$,

$v_1 = 2 - u_2 = 2 - (-4) = 6$.

Перевіряємо опорний розв'язок на оптимальність. З цією метою обчислюємо оцінки $\gamma_{ij}$ для всіх вільних клітин таблиці (для всіх базисних клітин $\gamma_{ij} = 0$) і записуємо їх значення в круглих дужках (наприклад, $\gamma_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 4 - (-11 + 6) = 9$).

Початковий опорний план не є оптимальним, так як є від'ємна оцінка $\gamma_{24} = -2$.

Переходимо до нового опорного плану. Для клітини $A_2B_4$ будуємо цикл перерахунку та робимо зсув на величину $\theta = \min\limits_{"-"}(100;100) = 100$:

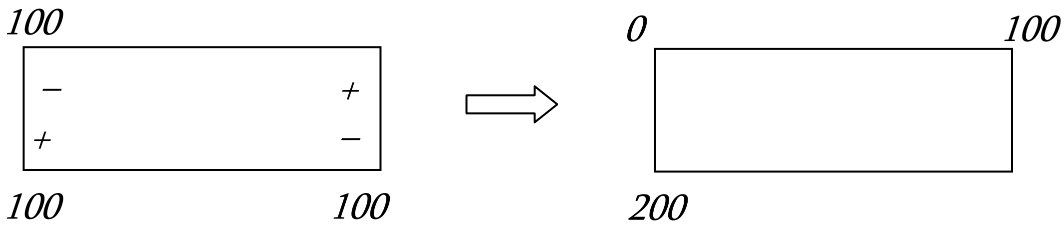



Рис 6.2

Отримуємо другий опорний розв'язок (таблиця 6.7).

Таблиця 6.7

| $A_i$ \ $B_j$ | 200 | 200 | 300 | 400 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 200 | (7) 4 | (5) 3 | (2) 2 | 1<br>200 | –5 |
| 300 | 2<br>200 | 3<br>0 | (0) 56 | <br>100 | 0 |
| 500 | (0) 6 | 7<br>200 | 9<br>300 | (2) 12 | 4 |
| 100 | (4) 0 | (3) 0 | (1) 0 | 0<br>100 | –6 |
| $v_j$ | 2 | 3 | 5 | 6 | |

Знаходимо для цього розв'язку потенціали та обчислюємо оцінки (приведені у таблиці 6.7). Всі оцінки невід'ємні. Отже, розв'язок є оптимальним. Обчислюємо значення цільової функції на цьому розв'язку:

$$z = 1\cdot 200 + 2\cdot 200 + 6\cdot 100 + 7\cdot 200 + 9\cdot 300 + 0\cdot 100 = 5200$$

при $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 200 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 300 & 0 \end{pmatrix}$.

---

## 6.4. Альтернативний оптимум та виродженість в транспортних задачах

Ознакою наявності альтернативного оптимуму в транспортній задачі є рівність нулю хоча б однієї з оцінок вільних клітин в оптимальному розв'язку ($X_{opt1}$). Якщо зробити перерозподіл вантажів відносно клітини, що має оцінку $\gamma_{lk} = 0$, то отримуємо новий оптимальний розв'язок ($X_{opt2}$), при цьому значення цільової функції не зміниться. Якщо лише одна оцінка вільних клітин транспортної задачі дорівнює нулю, то оптимальний розв'язок знаходиться у вигляді

$$X_{opt} = t\cdot X_{opt1} + (1-t)\cdot X_{opt2},$$

де $0 \le t \le 1$.

Розглянемо конкретну задачу, яка має альтернативний оптимум.

---

**Приклад 6.2.** На трьох складах є борошно у кількостях 60, 130 і 90 т, яке повинно бути протягом місяця доставлено чотирьом хлібозаводам у кількостях: 30, 80, 60, 110 т відповідно.

Скласти оптимальний план перевезення, якщо вартість перевезення 1 т борошна на хлібозаводи задана матрицею

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 15 & 4 \\ 9 & 15 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання*. Транспортна задача з правильним балансом. Складемо транспортну таблицю та знайдемо початковий опорний план за методом найменшої вартості.

Таблиця 6.8

| $A_i$ \ $B_j$ | 30 | 80 | 60 | 110 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 6<br>20 – | (–4) 8<br>+ | (12) 15 | 4<br>40 | 0 |
| 130 | (4) 9 | (4) 15 | 2<br>60 | 3<br>70 | –1 |
| 90 | 6<br>10 + | 12<br>– 80 | (4) 7 | (6) 10 | 0 |
| $v_j$ | 6 | 12 | 3 | 4 | |

Розв'яжемо задачу за методом потенціалів.

Таблиця 6.9

| $A_i$ \ $B_j$ | 30 | 80 | 60 | 110 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | (4) 6 | 8<br>20 + | (12) 15 | 4<br>– 40 | 0 |
| 130 | (8) 9 | (8) 15 | 2<br>60 – | 3<br>+ 70 | –1 |
| 90 | 6<br>30 | 12<br>60 – | (0) 7<br>+ | (2) 10 | 4 |
| $v_j$ | 2 | 8 | 3 | 4 | |

Отриманий розв'язок (таблиця 6.9) є оптимальним і так як $\gamma_{33} = 0$, то задача має альтернативний оптимум. Отже, один із розв'язків дорівнює

$$X_{opt1} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 & 70 \\ 30 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сумарна вартість перевезень складає: $z = 1550$ од.

Виконаємо цикл перерахунку відносно клітини $A_3B_3$:

Таблиця 6.10

| $A_i$ \ $B_j$ | 30 | 80 | 60 | 110 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | (4) 6 | 8<br>60 | (12) 15 | (0) 4 | 0 |
| 130 | (8) 9 | (8) 15 | 2<br>20 | 3<br>110 | –1 |
| 90 | 6<br>30 | 12<br>20 | 7<br>40 | (2) 10 | 4 |
| $v_j$ | 2 | 8 | 3 | 4 | |

Отримали ще один оптимальний розв'язок (таблиця 6.10):

$$X_{opt2} = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 110 \\ 30 & 20 & 40 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок задачі знаходиться за формулою

$X_{opt} = t \cdot X_{opt1} + (1-t) \cdot X_{opt2}$, де $0 \le t \le 1$.

Запишемо елементи матриці загального розв'язку:

$x_{11} = 0$, $x_{12} = 20t + (1-t) \cdot 60 = 60 - 40t$, $x_{13} = 0$, $x_{14} = 40t + (1-t) \cdot 0 = 40t$,

$x_{21} = 0$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 60t + (1-t) \cdot 20 = 20 + 40t$, $x_{24} = 70t + (1-t) \cdot 110 = 110 - 40t$,

$x_{31} = 30t + (1-t) \cdot 30 = 30$,

$x_{32} = 60t + (1-t) \cdot 20 = 20 + 40t$, $x_{33} = 0t + (1-t) \cdot 40 = 40 - 40t$, $x_{34} = 0$.

Отже, загальний розв'язок:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 60-40t & 0 & 40t \\ 0 & 0 & 20+40t & 110-40t \\ 30 & 20+40t & 40-40t & 0 \end{pmatrix}.$$

Сумарна вартість перевезень складає 1550 од.

---

При розв'язуванні транспортної задачі може статися, що кількість базисних клітин менша, ніж $m + n - 1$.

У цьому випадку задача має вироджений розв'язок. Для можливого його виключення доцільно поміняти місцями постачальників і споживачів або ввести у вільну клітину з найменшим тарифом нульову поставку. Нуль розмішують в такій клітині, щоб у кожному рядку і кожному стовпчику було не менше однієї базисної клітини.

Розглянемо вироджуваність в транспортній задачі на прикладі.

---

**Приклад 6.3.** Фірма здійснює поставку пляшок на три заводи, що виробляють охолоджувані напої. Вона має три склади, причому на складі 1 знаходиться 6000 пляшок, на складі 2 – 3000 пляшок і на складі 3 – 4000 пляшок. Першому заводу необхідно 4000 пляшок, другому – 5000 пляшок, третьому – 1000 пляшок. Матрицею

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

задана вартість перевезення однієї пляшки від кожного складу до кожного заводу.

Як необхідно організувати доставку пляшок на заводи, щоб вартість перевезення була мінімальною?

*Розв'язання.* Запишемо вихідні дані в транспортну таблицю і знайдемо початковий опорний план за методом найменшої вартості (таблиця 6.11). Кількість базисних клітин дорівнює 5, а $m+n-1=6$. Отже, задача є виродженою.

Таблиця 6.11

| $A_i$ \ $B_j$ | 4000 | 5000 | 1000 | 3000 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6000 | (3) 6 | 4<br>3000 | (6) 9 | 8<br>3000 | 0 |
| 3000 | (3) 5 | 3<br>2000 | 2<br>1000 | (1) 8 | –1 |
| 4000 | 2<br>4000 | 3<br>0 | (4) 6 | (1) 8 | –1 |
| $v_j$ | 3 | 4 | 3 | 8 | |

Для виключення вироджуваності необхідно в яку-небудь клітину ввести нульову поставку. Така клітина стає умовно базисною. Її доцільно визначити при обчислені потенціалів і вона повинна мати найменший тариф порівняно з іншими клітинами, які можуть бути умовно базисними. Отже, в нашому випадку такою кліткою буде $A_3B_2$.

Всі оцінки додатні, отримали оптимальний розв'язок:

$$X_{opt}=\begin{pmatrix} 0 & 3000 & 0 & 3000 \\ 0 & 2000 & 1000 & 0 \\ 4000 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вартість транспортних витрат буде мінімальною і складає 52 000 од.

## 6.5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА З ОБМЕЖЕННЯМИ НА ПРОПУСКНУ ЗДАТНІСТЬ

Нехай при розв'язуванні транспортної задачі необхідно обмежити перевезення від постачальника з номером $l$ до споживача з номером $k$. Можливі обмеження двох типів: 1) $x_{lk} \geq a$; 2) $x_{lk} \leq b$, де $a$ і $b$ – сталі величини.

Якщо $x_{lk} \geq a$, то необхідно перш, ніж розв'язувати задачу, зменшити запаси $l$-го постачальника і заявки $k$-го споживача на величину $a$ (зарезервувати перевезення $x_{lk} = a$). В отриманому оптимальному розв'язку слід збільшити об'єм перевезення $x_{lk}$ на величину $a$.

Якщо $x_{lk} \leq b$, то необхідно замість $k$-го споживача із заявками $b_k$ ввести двох інших споживачів. Однин з них із номером $k$ повинен мати заявки $b'_k = b$, а другий з номером $n+1$ – заявки $b_{n+1} = b_k - b$. Вартості перевезень для цих споживачів залишаються попередніми, за виключенням вартості $c_{l,n+1}$, яка приймається рівною як завгодно великому числу $M$ ($M >> 1$). Після отримання оптимального розв'язку величини вантажів, які перевозяться до $(n+1)$-го споживача, додаються до величин перевезень $k$-го споживача. Так як $c_{l,n+1} = M$ сама велика вартість перевезення, то в оптимальному розв'язку клітина $A_l B_{n+1}$ залишається вільною ($x_{l,n+1} = 0$) і об'єм перевезення $x_{lk}$ не перевищить $b$.

---

**Приклад 6.4.** Розв'язати транспортну задачу, вихідні дані якої:

$$\vec{a} = (300; 400; 500),\ \vec{b} = (600; 500; 400),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 10 \\ 3 & 11 & 13 \\ 4 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

При додаткових умовах: об'єм перевезення вантажу від другого постачальника до другого споживача повинен бути не менше 200 одиниць ($x_{22} \geq 200$), а від третього до першого – не більше 300 одиниць ($x_{31} \leq 300$).

*Розв'язання*. Транспортна таблиця задачі має вигляд:

| $A_i$ \ $B_j$ | 600 | 500 | 400 |
|---|---|---|---|
| 300 | 2 | 9 | 10 |
| 400 | 3 | 11 | 13 |
| 500 | 4 | 10 | 12 |

Для того щоб в оптимальному розв'язку об'єм перевезення $x_{22}$ був не менше 200 одиниць, при розв'язуванні задачі будемо вважати, що запаси другого постачальника $a_2$ і заявки другого споживача $b_2$ менше фактичних на 200 одиниць. Після отримання оптимального розв'язку об'єм перевезення $x_{22}$ збільшиться на 200 одиниць.

Для того щоб задовольнити вимогу $x_{31} \le 300$, замість першого споживача введемо двох інших. Один з них під попереднім номером має заявки $b_1 = 300$ одиниць і попередні вартості перевезень. Другому надамо четвертого номеру. Його заявки дорівнюють $b_4 = 600 - 300 = 300$ одиниць і вартості перевезень ті ж самі, що і у першого споживача, за винятком $c_{34}$, яку приймемо рівною скільки завгодно великому числу $M$, тобто $c_{34} = M$. Після знаходження оптимального розв'язку задачі об'єми перевезень для четвертого споживача необхідно додати до відповідних об'ємів перевезень для першого споживача.

В результаті вказаних перетворень таблиця вихідних даних задачі набуде наступний вигляд:

| $A_i \backslash B_j$ | 300 | 300 | 400 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| 300 | 2 | 9 | 10 | 2 |
| 200 | 3 | 11 | 13 | 3 |
| 500 | 4 | 10 | 12 | $M$ |

Далі задачу розв'язуємо звичайним методом потенціалів. Задача з неправильним балансом. Введемо фіктивного постачальника із запасами $a_4 = 300$ одиниць (таблиця 6.12).

Таблиця 6.12

| $A_i \backslash B_j$ | 300 | 300 | 400 | 300 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 300 | [2] 300 | (9) [9] | (8) [10] | [2] 0 | 0 |
| 200 | (0) [3] | (12) [11] | (12) [13] | [3] 200 | 1 |
| 500 | (–8) [4] | [10] 300 | [12] 200 | ($M$–12) [$M$] | 10 |
| 300 | (0) [0] | (2) [0] | [0] 200 | [0] 100 | –2 |
| $v_j$ | 2 | 0 | 2 | 2 | |

Здійснивши зсув за циклом перерахунку відносно клітини $A_3B_1$, для якої оцінка дорівнює $\gamma_{31} = -8$, отримуємо оптимальний розв'язок (таблиця 6.13).

Таблиця 6.13

| $A_i$ \ $B_j$ | 300 | 300 | 400 | 300 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 300 | 2<br>200 | (1) 9 | (0) 10 | 2<br>100 | –2 |
| 200 | (0) 3 | (0) 11 | (0) 13 | 3<br>200 | –1 |
| 500 | 4<br>100 | 10<br>300 | 12<br>100 | ($M$–4) $M$ | 0 |
| 300 | (8) 0 | (2) 0 | 0<br>300 | (8) 0 | –12 |
| $v_j$ | 4 | 10 | 12 | 4 | |

Запишемо оптимальний розв'язок вихідної задачі. Для цього збільшимо об'єм перевезення $x_{22}$ на 200 одиниць і об'єднаємо об'єми перевезень четвертого споживача з об'ємами перевезень першого споживача. Отримуємо

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 200 & 200 & 0 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix},$$

$$z_{opt} = 2 \cdot 300 + 2 \cdot 200 + 11 \cdot 200 + 4 \cdot 100 + 10 \cdot 300 + 12 \cdot 100 = 7800.$$

## 6.6. ЕКОНОМІЧНИЙ АНАЛІЗ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ

Наведемо економічний аналіз транспортної задачі на конкретному прикладі.

**Приклад 6.5.** Три торгових склади можуть постачати деякий виріб у кількості 9, 4 і 8 т. Величини попиту трьох магазинів роздрібної торгівлі на цей виріб дорівнюють 3, 5 і 6 т.

Яка мінімальна вартість транспортування від постачальника до споживача? Провести аналіз розв'язку при умові, що одиничні транспортні витрати дорівнюють в ум. од.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 2 & 10 & 8 \\ 1 & 20 & 7 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Запаси складів: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 21$ т, потреби магазинів: $\sum_{j=1}^{3} b_j = 14$ т, маємо відкриту задачу. Введемо фіктивний магазин з попитом $b_4 = 7$ і тарифом 0 ум. од.(таблиця 6.14).

Таблиця 6.14

| $A_i \setminus B_j$ | 3 | 5 | 6 | 7 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | (9) 10 | 20 1 | 5 6 | 0 2 | 0 |
| 4 | (11) 2 | 10 4 | (13) 8 | (10) 0 | –10 |
| 8 | 1 3 | (0) 20 | (2) 7 | 0 5 | 0 |
| $v_j$ | 1 | 20 | 5 | 0 | |

Оцінка $\gamma_{32} = 0$, задача має альтернативний оптимум, і один з розв'язків має вигляд

$$X_{opt1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мінімальна вартість транспортних витрат $z_{opt} = 93$ ум. од.

Підсумковий розподіл перевезень, а також значення оцінок вільних клітин, які називають *тіньовими цінами*, можна використати при проведенні економічного аналізу. Тіньова ціна показує, на скільки збільшиться загальна вартість транспортних витрат, якщо у вільну клітину помістити один виріб. Наприклад, якщо прийдеться здійснити перевезення одного виробу з торгового складу 2 у роздрібний магазин 3, то збільшення вартості складатиме $\gamma_{23} = 13$ ум. од., що більше ніж тариф вантажу клітини $A_2B_3$, рівний 8 ум. од. Додаткове збільшення вартості транспортних витрат з'являється в зв'язку з перерозподілом перевезень. Складемо цикл перерахунку з вільною клітиною $A_2B_3$ і виконаємо зсув (рис. 6.3).

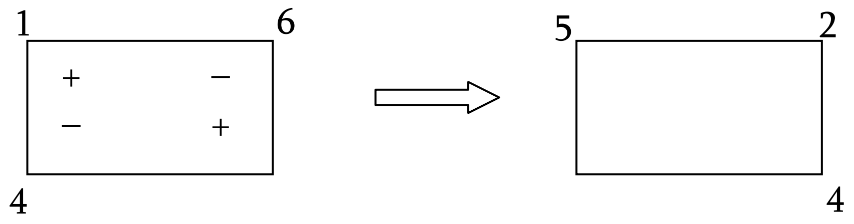



Рис. 6.3

Зміна витрат складає $4 \cdot 20 - 4 \cdot 10 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 5 = 72$ ум. од. або на один виріб $72 : 4 = 13$ ум. од.

Якщо тіньова ціна клітини дорівнює нулю ($\gamma_{23} = 0$), то задача має альтернативний оптимум. Перерозподілимо вантажі відносно клітини $A_3B_2$ (рис 6.4).

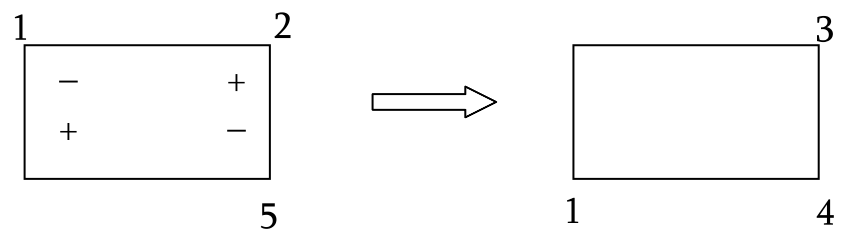



Рис. 6.4

Ще один оптимальний розв'язок задачі має вигляд

$$X_{opt2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічний аналіз можна провести і по іншим вільним клітинам.

Тіньові ціни вільних клітин можна використати в якості індикаторів змін вартості перевезень одного виробу або тарифу.

Наприклад, тіньова ціна вільної клітини $A_3B_3$ дорівнює $\gamma_{33}=2$, а фактична ціна перевезення одного виробу – 7 ум. од. Отже, для того щоб використання цієї клітини у розподілі перевезення привело до зниження транспортних витрат, необхідно, щоб тариф цієї клітини був не більше $7-2=5$ ум. од.

Проведемо вартісний аналіз змін в базисних клітинах. При зниженні тарифу збільшення числа виробів у даній клітині вигідно. Якщо ж тарифи базисних клітин зростають, то при досягненні ними певного значення використання цієї клітини небажане і необхідно провести перерозподіл вантажів.

В якості прикладу визначимо допустимі зміни тарифу базисної клітини $A_1B_3$. Тариф клітки дорівнює 5 ум. од. за один виріб. Зменшення цієї величини не буде впливати на об’єм перевезень, так як вказана кількість виробів в клітині задовольняє всю потребу магазину 3.

Якщо тариф клітки $A_1B_3$ стає більшим 5 ум. од., то при складанні циклів буде задіяна вільна клітина $A_2B_3$ з $\gamma_{23}=13$ або $A_3B_3$ з $\gamma_{33}=2$. В обох циклах перерахунку клітина $A_1B_3$ буде мати знак „–” і будь-яке збільшення тарифу спричинить зниження тіньової ціни вільних клітин $A_2B_3$ і $A_3B_3$.

Зміна об’єму перевезень буде мати місце у випадку, якщо тариф клітини $A_1B_3$ зросте більше ніж на 2 ум. од. і перевищить 7 ум. од. При цьому тіньова ціна клітини $A_3B_3$ стає від’ємною та стає невигідним використання клітини $A_1B_3$.

Отже, для одержання оптимального розподілу перевезень тариф клітини $A_1B_3$ повинен змінюватись у діапазоні від 0 до 7 ум. од. Всередині вказаного проміжку відбувається лише зміна загальної вартості перевезень, а розподіл перевезень не змінюється.

## 6.7. Транспортна задача за критерієм часу

Задача за критерієм часу виникає при перевезенні термінових вантажів. У деяких умовах, наприклад при транспортуванні певних видів товарів, в аварійних ситуаціях, у бойових обставинах, вартість перевезення має другорядне значення, а на перше місце виходить завдання мінімізації того часу, протягом якого здійснюються всі перевезення.

Як і в звичайній транспортній задачі, є $m$ постачальників із запасами $a_1, a_2, \ldots, a_m$ та $n$ споживачів, яким цей вантаж повинен бути доставлений у об'ємах $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Відомі інтервали часу $t_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$), за які вантаж доставляється від кожного $i$-го постачальника кожному $j$-му споживачу. Треба скласти такий план перевезень вантажу, при якому запаси всіх постачальників вивозяться повністю, попит всіх споживачів задовольняється повністю і найбільший час доставки всіх вантажів є мінімальним.

Складемо математичну модель цієї задачі. Позначимо $x_{ij}$ – об'єм вантажу, який перевозиться від $i$-го постачальника до $j$-го споживача. Система обмежень задачі не відрізняється від системи обмежень звичайної транспортної задачі. Нехай $X = (x_{ij})$ ($i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$) – деякий опорний розв'язок задачі. Запишемо цільову функцію задачі. Позначимо через $T(X)$ найбільше значення елементів матриці $T = (t_{ij})$, які відповідають базисним клітинам таблиці: $T(X) = \max(t_{ij})$. Отже, за час $T(X)$ план перевезень буде виконаний повністю.

Математична модель транспортної задачі за критерієм часу має вигляд

$$T(X) = \max(t_{ij}) \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \,,$$

$$x_{ij} \ge 0 \,,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m \,; \; j = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Задача розв'язується в наступному порядку. Знаходиться початковий опорний розв'язок $X_1$. Визначається значення цільової функції $T(X_1) = \max(t_{ij}) = t_{l_1 k_1}$. Всі вільні клітини, яким відповідає значення $t_{ij} > T(X_1)$, виключаються з розгляду (перекреслюються). Займати ці клітки недоцільно, так як збільшиться значення цільової функції. Щоб зменшити її значення, необхідно звільнити клітину $A_{l_1} B_{k_1}$, в якій $t_{ij}$ досягає максимуму. Для цього будують так званні *розвантажувальні цикли*, які можуть включати у свій склад декілька вільних клітин. У кожному розвантажувальному циклі, починаючи з розвантажувальної клітини $A_{l_1} B_{k_1}$, розставляються знаки „–" і „+" та здійснюється зсув на величину $\theta = \min\limits_{"-"}(x_{ij})$. Якщо вдається цю клітину розвантажити, то вона виключається з розгляду (закреслюється). Одержується новий опорний розв'язок $X_2$, на якому значення цільової функції менше, ніж на $X_1$. Далі знову намагаються розвантажити клітину, яка відповідає $T(X_2) = \max(t_{ij}) = t_{l_2 k_2}$. Процес продовжується до тих пір, доки можливість розвантажити відповідну клітину ще існує.

**Приклад 6.6.** Знайти мінімальний час на здійснення всіх перевезень для наступної задачі:

$$\vec{a} = (30; 40; 50; 60), \; \vec{b} = (20; 40; 50; 70), \; T = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 7 & 11 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 12 & 5 & 10 \\ 19 & 6 & 14 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Складемо початковий опорний розв'язок $X_1$ діагональним методом (таблиця 6.15). Максимум цільової функції

$T(X_1) = \max(13, 8, 7, 9, 5, 10, 4) = 13$ досягається у клітині $A_1B_1$. Перекреслимо клітини $A_4B_1$ і $A_4B_3$, в яких час доставки вантажу $t_{41} = 19$ і $t_{43} = 14$ більше $T(X_1) = 13$.

Таблиця 6.15

| $A_i$ \ $B_j$ | 20 | 40 | 50 | 70 |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 13<br>20 − | 8<br>+ 10 | 7 | 11 |
| 40 | 6<br>+ | 7<br>− 30 | 9<br>10 | 8 |
| 50 | 5 | 12 | 5<br>40 | 10<br>10 |
| 60 | 19<br>✕ | 6 | 14<br>✕ | 4<br>60 |

Для покращення розв'язку розвантажуємо клітину $A_1B_1$ за допомогою циклу $A_2B_1$, $A_1B_1$, $A_1B_2$, $A_2B_2$ (таблиця 6.15). В означеному циклі знаходимо $\theta = \min(20, 30) = 20$. Зробивши зсув за циклом, отримуємо другий опорний розв'язок $X_2$ (таблиця 6.16). Максимум цільової функції на цьому опорному розв'язку $T(X_2) = \max(8, 6, 7, 9, 5, 10, 4) = 10$ досягається у клітині $A_3B_4$.

Таблиця 6.16

| $A_i$ \ $B_j$ | 20 | 40 | 50 | 70 |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 13 | 8 / 30 | 7 | 11 |
| 40 | 6 / 20 | 7 / 10 | 9 / 10 − | 8 / + |
| 50 | 5 | 12 | 5 / 40 + | 10 / 10 − |
| 60 | 19 | 6 | 14 | 4 / 60 |

Перекреслимо клітини $A_1B_1$, $A_1B_4$ і $A_3B_2$, в них час $t_{11}=13$, $t_{14}=11$ і $t_{32}=12$ більше ніж $T(X_2)=10$. Розвантажуємо клітку $A_3B_4$ за допомогою циклу $A_2B_4$, $A_3B_4$, $A_3B_3$ і $A_2B_3$. В означеному циклі знаходимо $\theta=\min(10{,}10)=10$. Здійснюючи зсув за циклом, отримуємо третій опорний розв'язок $X_3$ (таблиця 6.17).

Таблиця 6.17

| $A_i$ \ $B_j$ | 20 | 40 | 50 | 70 |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 13 | 8 / 30 | 7 | 11 |
| 40 | 6 / 20 | 7 / 10 | 9 | 8 / 10 |
| 50 | 5 | 12 | 5 / 50 | 10 |
| 60 | 19 | 6 | 14 | 4 / 60 |

Максимум цільової функції на цьому опорному розв'язку $T(X_3)=\max(8,6,7,8,5,4=8)$ досягається у клітинах $A_1B_2$ і $A_2B_4$. Перекреслимо клітини $A_2B_3$ і $A_3B_4$, в яких час більше, ніж $T(X_3)=8$. За допомогою невикреслених клітин, які залишилися, розвантажити клітини $A_1B_2$ і $A_2B_4$ не вдається, тому $X_3$ є оптимальним розв'язком:

$$T\left(X_{opt}\right)=8 \text{ при } X_{opt}=\begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

## 6.8. Застосування транспортних моделей для розв'язування деяких економічних задач

Алгоритм і методи розв'язування транспортної задачі можуть бути використані при розв'язуванні деяких економічних задач, які не мають нічого спільного з транспортуванням вантажу. В цьому випадку величини тарифів $c_{ij}$ мають різний зміст в залежності від конкретної економічної задачі.

Є цілий клас задач, які називаються розподільчими, окремим випадком яких є транспортна задача, і розв'язування яких зводиться до транспортної моделі.

Загальна розподільча задача має вигляд

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\rightarrow opt,$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leq a_i,\ i=1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}x_{ij}=b_j,\ \ j=1,2,\ldots,n,$$

$$x_{ij}\geq 0.$$

До задач розподільчого типу відносяться наступні:

1. Оптимальне закріплення за станками операцій по обробці деталей. В них $c_{ij}$ є таким економічним показником, як продуктивність. Задача дозволяє визначити, скільки часу і на якій операції треба використовувати кожен з станків, щоб обробляти максимальну кіль-

кість деталей. Так як транспортна задача вимагає знаходження мінімуму, то значення $c_{ij}$ беруться з від’ємним знаком.

2. Оптимальне призначення, або проблема вибору. Є $m$ механізмів (виконавців), які можуть виконувати $m$ різних робіт з продуктивністю $c_{ij}$. Задача дозволяє визначити, який механізм (виконавець) і на яку роботу треба призначити, щоб досягти максимальної продуктивності.
3. Задача про скорочення виробництва з урахуванням сумарних витрат на виготовлення і транспортування продукції.
4. Збільшення продуктивності автомобільного транспорту за рахунок мінімізації порожнього пробігу. Зменшення порожнього пробігу скоротить кількість автомобілів для перевезень, збільшив їх продуктивність.
5. Розв’язання задач за допомогою методу заборони перевезень використовується в тому випадку, якщо вантаж від деякого постачальника за якимись причинами не може бути направлений одному із споживачів. Дане обмеження можна врахувати, якщо надати відповідній клітині достатньо велике значення вартості, тим самим в цю клітку не будуть виконуватись перевезення.

Розглянемо задачу про вибір оптимального варіанту використання виробничого обладнання.

---

**Приклад 6.7.** На підприємстві є три групи станків, кожна з яких може виконувати п’ять операцій по обробці деталей (операції можуть виконуватись в будь-якому порядку). Максимальний час роботи кожної групи станків відповідно складає 100, 250, 180 год. Кожна операція повинна виконуватись відповідно 100, 120, 70, 110, 130 год.

Визначити, скільки часу і на яку операцію треба використати кожну групу станків, щоб обробити максимальну кількість деталей.

Продуктивність кожної групи станків на кожну операцію задана матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

*Розв’язання.* Скористаємося алгоритмом розв’язування закритої транспортної задачі.

Так як в задачі треба знайти максимум, а згідно алгоритму транспортної задачі знаходиться мінімум, тарифи помножимо на $(-1)$ (таблиця 6.18).

Таблиця 6.18

| $A_i$ \ $B_j$ | 100 | 120 | 70 | 110 | 130 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | -3<br>40 | (3) -5 | (2) -11 | (-3) -10 | -5<br>60 | 0 |
| 250 | -5<br>60 | -10<br>120 | -15<br>70 | (6) -3 | (5) -2 | -2 |
| 180 | (4) -4 | (5) -8 | (12) -6 | -12<br>110 | -10<br>70 | -5 |
| $v_j$ | -3 | -8 | -13 | -7 | -5 | |

Так як $\gamma_{14} = -3 < 0$, перерозподілимо вантажі відносно клітини $A_1B_4$ (таблиця 6.19).

Таблиця 6.19

| $A_i$ \ $B_j$ | 100 | 120 | 70 | 110 | 130 | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | -3<br>40 | (3) -5 | (2) -11 | -10<br>60 | (3) -5 | 0 |
| 250 | -5<br>60 | -10<br>120 | -15<br>70 | (9) -3 | (8) -2 | -2 |
| 180 | (1) -4 | (2) -8 | (9) -6 | -12<br>50 | -10<br>130 | -2 |
| $v_j$ | -3 | -8 | -13 | -10 | -8 | |

Знайдений розв'язок є оптимальним, так як всі оцінки вільних клітин додатні. Отже,

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{pmatrix}.$$

Отже, на першій групі станків доцільно виконувати операції 1 та 4 тривалістю 40 і 60 год. відповідно, на другій групі – операції 1, 2 та 3 тривалістю 60, 120 і 70 год. відповідно, на третій групі – операції 4 та 5 тривалістю 50 і 130 год. відповідно. При цьому максимальна кількість оброблених деталей складає 5170 шт.

---

Розглянемо у загальному випадку задачу про призначення: є $n$ робіт та $n$ виконавців цих робіт, продуктивність кожного з яких $(i = 1, 2, \ldots, n)$ на виконання окремої роботи $(j = 1, 2, \ldots, n)$ дорівнює $c_{ij}$. Необхідно так розподілити виконавців по роботах (за принципом: один виконавець – одна робота), щоб загальна їх продуктивність була максимальною. Нехай $x_{ij} = 1$, якщо $i$-й робітник виконуватиме $j$-ту роботу, і $x_{ij} = 0$ в протилежному випадку. Тоді цільова функція задачі запишеться

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max .$$

Обмеження задачі випливають з принципу „одна робота – один виконавець”, а саме:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j - 1, 2, \ldots, n.$$

Отже, маємо задачу максимізації транспортного типу, де всі $a_i = b_j = 1$. Особливістю цієї задачі є те, що її опорні плани будуть завжди вироджені. Справді, оскільки $m = n$, а $a_i = b_j = 1$, то заповнити одиницями можна лише $n$ клітин, в той час як загальна кількість базових клітин дорівнюватиме $2n - 1$. Отже, $n - 1$ клітина залишатиметься незаповненою. Ці особливості задачі про призначення слід мати на увазі при розв’язуванні її методом потенціалів.

## Питання для самоконтролю

1. Дайте економічну і математичну постановку транспортної задачі.
2. Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійного програмування?
3. За яких умов транспортна задача називається закритою, за яких – відкритою?
4. Як відкриту транспортну задачу звести до закритої?
5. Що таке опорний план перевезення? Які методи його обчислення ви знаєте?
6. Скільки компонентів повинно бути в опорному плані? За яких умов транспортна задача називається виродженою?
7. Що таке цикл перерахунку у транспортній таблиці?
8. Як обчислюють потенціали?
9. Умова оптимальності розв'язку транспортної задачі.
10. Назвіть етапи розв'язування методом потенціалів.
11. За яких умов транспортна задача має альтернативний оптимум? Як записується загальний розв'язок при наявності двох альтернативних оптимумів?
12. Назвіть особливості розв'язування транспортних задач з обмеженнями на пропускну здатність.
13. Дайте економічну і математичну постановку транспортної задачі за критерієм часу.
14. Які задачі лінійного програмування відносяться до задач розподільчого типу?

## Вправи

Розв'язати транспортні задачі методом потенціалів:

6.1. $\vec{a}=(9;16;5)$, $\vec{b}=(11;7;8;4)$, $C=\begin{pmatrix}2&5&8&1\\8&3&9&2\\7&4&6&3\end{pmatrix}$;

6.2. $\vec{a}=(7;13;20)$, $\vec{b}=(10;10;5;8;7)$, $C=\begin{pmatrix}4&6&8&3&2\\5&3&4&6&4\\3&2&5&7&5\end{pmatrix}$;

6.3. $\vec{a}=(100;200;400;200)$, $\vec{b}=(100;200;200;300)$, $C=\begin{pmatrix}1&3&4&1\\5&2&2&7\\4&4&3&6\\7&2&5&3\end{pmatrix}$;

6.4. $\vec{a}=(200;400;600;200)$, $\vec{b}=(200;400;400;800)$, $C=\begin{pmatrix}1&6&9&3\\3&2&2&4\\4&5&4&7\\1&4&3&9\end{pmatrix}$;

6.5. $\vec{a}=(300;200;100;200)$, $\vec{b}=(300;200;300;100)$, $C=\begin{pmatrix}3&4&3&1\\2&3&5&6\\1&2&3&3\\4&5&7&9\end{pmatrix}$;

6.6. $\vec{a}=(200;200;300;300)$, $\vec{b}=(200;300;400;200)$, $C=\begin{pmatrix}1&3&4&2\\1&2&4&1\\3&4&5&9\\6&3&7&6\end{pmatrix}$;

6.7. $\vec{a}=(5;10;15;10)$, $\vec{b}=(10;15;15;10;10)$, $C=\begin{pmatrix}3&4&5&4&6\\1&5&7&1&5\\4&6&6&3&4\\2&7&4&7&2\end{pmatrix}$;

6.8. $\vec{a}=(30;60;90;60)$, $\vec{b}=(30;90;60;90;30)$, $C=\begin{pmatrix}1&3&4&3&1\\9&5&2&4&8\\3&4&7&4&3\\5&7&2&6&6\end{pmatrix}$;

6.9. $\vec{a}=(10;5;5;10;15)$, $\vec{b}=(5;10;15;15;15)$, $C=\begin{pmatrix}2&1&3&5&7\\4&3&4&4&3\\5&2&3&6&2\\3&6&5&2&4\\1&9&7&3&4\end{pmatrix}$;

6.10. $\vec{a}=(5;5;10;15;10)$, $\vec{b}=(5;5;10;10;5)$, $C=\begin{pmatrix}3&4&6&5&13\\6&3&7&6&10\\10&5&2&2&6\\9&4&4&9&5\\4&6&2&3&4\end{pmatrix}$;

6.11. $\vec{a}=(200;300;200;200;100)$, $\vec{b}=(200;200;100;200)$, $C=\begin{pmatrix}5&2&1&1\\1&3&4&4\\4&2&3&1\\4&3&5&2\\3&2&4&2\end{pmatrix}$;

6.12. $\vec{a}=(10;30;60;10;60)$, $\vec{b}(10;30;30;30;40)$, $C=\begin{pmatrix}3&1&3&4&3\\5&1&2&2&6\\2&3&4&1&1\\6&2&5&3&2\\3&7&4&4&1\end{pmatrix}$;

6.13. $\vec{a}=(20;40;80;40;20)$, $\vec{b}=(20;20;40;40;40)$, $C=\begin{pmatrix}4&5&2&4&3\\3&1&3&5&2\\2&7&6&8&6\\3&3&1&4&9\\1&6&9&2&7\end{pmatrix}$;

6.14. $\vec{a}=(500;1500;500;1500;500)$, $\vec{b}=(1000;500;1500;2000)$, $C=\begin{pmatrix}3&1&2&5\\1&3&4&2\\3&6&5&6\\2&8&5&7\\4&3&9&8\end{pmatrix}$

6.15. $\vec{a}=(25;50;75;25;75)$, $\vec{b}=(50;25;50;75)$, $C=\begin{pmatrix}3&1&8&1\\2&5&2&3\\9&4&6&5\\7&3&10&3\\4&6&7&4\end{pmatrix}$;

6.16. $\vec{a}=(150;300;250;150)$, $\vec{b}=(150;200;200;400)$, $C=\begin{pmatrix}1&4&7&2\\3&6&3&9\\4&8&12&2\\1&5&9&13\end{pmatrix}$;

6.17. $\vec{a}=(20;30;10;30;30)$, $\vec{b}=(20;30;20;20;10)$, $C=\begin{pmatrix}1&5&1&1&5\\4&2&6&7&9\\3&4&5&6&5\\4&2&3&3&6\\6&2&3&5&4\end{pmatrix}$;

6.18. $\vec{a}=(20;40;60;40)$, $\vec{b}=(40;60;40;60;20)$, $C=\begin{pmatrix}3&3&4&2&3\\1&2&1&5&3\\4&8&2&9&12\\5&7&1&3&6\end{pmatrix}$;

6.19. $\vec{a}=(150;250;250;150)$, $\vec{b}=(300;150;300;150)$, $C=\begin{pmatrix}2&1&3&1\\8&3&7&4\\6&4&9&3\\5&2&4&2\end{pmatrix}$;

6.20. $\vec{a}=(100;200;300;400)$, $\vec{b}=(200;300;200;300;100)$, $C=\begin{pmatrix}2&3&4&5&1\\2&4&2&6&7\\6&5&4&5&4\\4&6&7&6&9\end{pmatrix}$.

Розв'язати транспортні задачі з урахуванням обмежень на перевезення вантажів:

6.21. $x_{24} \le 500$, $x_{32} \ge 500$, $\vec{a} = (500;1500;1000;1500)$, $\vec{b} = (500;1000;500;1500)$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

6.22. $x_{44} \le 200$, $x_{33} \ge 100$, $\vec{a} = (100;200;300;400)$, $\vec{b} = (300;300;300;300)$,

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

6.23. $x_{12} \le 500$, $x_{33} \ge 1000$, $\vec{a} = (1000;1500;2000;500)$,

$$\vec{b} = (2000;1000;2000;1000),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 9 & 3 \\ 3 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix};$$

6.24. $x_{31} \le 50$, $x_{14} \ge 50$, $\vec{a} = (100;50;100;50)$, $\vec{b} = (100;100;50;100)$,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix};$$

6.25. $x_{41} \le 100$, $x_{33} \ge 50$, $\vec{a} = (100;50;100;200)$, $\vec{b} = (200;100;200;50)$,

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

6.26. $x_{41} \le 50$, $x_{33} \ge 100$, $\vec{a} = (50;100;200;100)$, $\vec{b} = (100;100;200;200)$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix};$$

6.27. $x_{41} \le 20$, $x_{32} \ge 30$, $\vec{a} = (30;30;60;60)$, $\vec{b} = (30;60;30;90)$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 10 & 6 \\ 3 & 3 & 13 & 7 \\ 3 & 4 & 11 & 4 \end{pmatrix};$$

6.28. $x_{24} \le 10$, $x_{42} \ge 10$, $\vec{a} = (10;20;10;40)$, $\vec{b} = (10;20;20;40)$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 15 & 9 \\ 5 & 6 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати транспортні задачі за критерієм мінімуму часу:

6.29. $\vec{a} = (10;15;25)$, $\vec{b} = (5;10;20;15)$, $T = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

6.30. $\vec{a} = (200;100;200;300)$, $\vec{b} = (200;200;200;200)$, $T = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

6.31. Розв’язати транспортну задачу при умові, що перевезення від другого постачальника до другого споживача та від третього постачальника до першого споживача тимчасово закриті: $\vec{a} = (6;3;4)$, $\vec{b} = (5;5;3)$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ 5 & M & 2 \\ M & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

6.32. У трьох пунктах виробництва є однакова продукція в об'ємі 200, 170, 130 т. Ця продукція повинна бути доставлена споживачам у кількості 50, 220, 80, 110 і 140 т. Вартості перевезень одиниці продукції від кожного постачальника до кожного споживача задані матрицею $C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 & 15 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 12 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. У зв'язку з неплатоспроможністю перевезення від першого пункту виробництва до першого пункту споживання та від другого пункту виробництва до третього пункту споживання тимчасово закриті. Скласти оптимальний план перевезень, при якому сумарні витрати на них мінімальні.

6.33. Знайти оптимальний розподіл трьох видів механізмів, які є у кількостях 45, 20 і 35 між чотирма ділянками робіт, потреби яких складають відповідно 10, 20, 30, 40, при наступній матриці продуктивності кожного з механізмів на відповідній ділянці роботи: $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. Нульові елементи означають, що даний механізм на даній ділянці роботи не може бути використаний.

6.34. Скласти оптимальний розподіл спеціалістів чотирьох профілів, які є у кількостях 60, 30, 45, 25 між п'яти видами робіт. Потреби у спеціалістах для кожного виду робіт відповідно дорівнюють 20, 40, 25, 45 і 30. Матриця $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ характеризує ефективність використання спеціаліста на даній роботі.

6.35. На трьох ділянках посівних площ розміром у 300, 500 і 400 га можуть бути посаджені 4 види сільськогосподарських культур, які необхідно виростити у кількості, відповідно 600, 1500, 225 і 1250 т.

Матриця $C=\begin{pmatrix}20 & 25 & 30\\ 50 & 40 & 15\\ 24 & 10 & 20\\ 10 & 20 & 15\end{pmatrix}$ характеризує собівартість 1 т при вирощуванні $i$-ї культури на $k$-й ділянці. Скласти оптимальний план посіву, якщо врожайність за різними культурами не залежить від ділянки посіву і складає 20, 30, 15 та 50 ц/га.

6.36. В наступних задачах скласти модель та знайти оптимальну програму обробки трьох виробів (*А, Б, В*) на двох взаємозамінних станках (I, II) при наступних вихідних даних:

| Станки | Норми часу, год/шт. | | | Робочий час, год. | Собівартість, грн/год. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | А | Б | В | | А | Б | В |
| I | 2 | 5 | 3 | 200 | 3 | 2 | 4 |
| II | 4 | 7 | 5 | 350 | 2,5 | 2 | 3 |
| План, шт. | 80 | 30 | 10 | Прибуток, грн/шт. | 20 | 40 | 30 |

В якості критерію оптимальності вибрати:

а) мінімум собівартості;

б) мінімум витрат часу роботи станків;

в) максимум прибутку.

6.37. Фірма об’єднує три підприємства, кожне з яких виробляє три види виробів. Продуктивність кожного підприємства при виготовлені одного виробу (в грошових одиницях) характеризується наступною таблицею:

| | Виріб | | |
|---|---|---|---|
| Підприємство | 15 | 6 | 12 |
| | 6 | 9 | 13 |
| | 8 | 11 | 2 |

Враховуючи необхідність спеціалізації кожного підприємства тільки на одному виробі, розподілити виробництво виробів за підприємствами так, щоб сумарна продуктивність фірми при цьому розподілі була максимальною.

6.38. Є 5 видів робіт і 5 працівників, кожен з яких може виконати будь-яку з цих робіт. При цьому кожен працівник виконує лише одну роботу. Продуктивності працівника $A_i$ при виконанні роботи $B_k$ подані в наступній таблиці:

| $A_i$ \ $B_k$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | 2 | 2 | 1 |
| $A_2$ | 4 | 5 | 3 | 1 | 3 |
| $A_3$ | 4 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| $A_4$ | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| $A_5$ | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 |

Розподілити працівників на роботу так, щоб сумарна продуктивність була максимальною.

# РОЗДІЛ 7
# ЦІЛОЧИСЛОВЕ ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

## 7.1. Характеристика задач цілочислового програмування і методів їх розв'язування. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування

Існує доволі широкий клас задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких змінні можуть набувати тільки цілих числових значень. Необхідність цієї умови стане зрозумілою, коли згадати, що багато видів ресурсів виробництва можуть бути визначені кількісно лише цілими числами: люди, машини, верстати, тварини і т. п. До цілочислового програмування належать також задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень – 0 або 1 (булеві, або бінарні, змінні).

Умова цілочислових значень є, по суті, нелінійною і може бути в задачах, що містять як лінійні так і нелінійні функції. Вимога цілочислових значень часто накладається лише на частину змінних. Такі задачі називаються *частково-цілочисловими*. Цілочислові задачі є розділом більш широкого класу *дискретних задач*, змінні яких приймають значення деякої дискретної, наперед обумовленої, числової множини, наприклад множини раціональних чисел, множини чисел $2^k$, де $k = 1, 2, \ldots, n$ і т. п. Назвемо деякі задачі дискретного програмування: планування перевезення вантажів в контейнерах, об'єми яких приймають дискретні значення; планування виробництва за умов, коли використовувані агрегати мають певні дискретні виробничі потужності, наприклад, потужності електродвигунів; планування площ під розташування певних агрегатів з різними дискретними зонами обслуговування.

Незважаючи на інтенсивні дослідження, які проводились на протязі останніх десятиріч, відомі обчислювальні методи розв'язування задач цілочислового програмування далекі від досконалості. На даний час не існує надійних обчислювальних алгоритмів розв'язування таких задач.

У цьому розділі коротко розглядаються так звані *цілочислові лінійні задачі*, тобто такі, в яких крім вимоги цілочислових значень усі обмеження і цільова функція мають лінійний вигляд.

Слід відмітити, що класична транспортна задача і деякі інші задачі транспортного типу „автоматично" забезпечують розв'язування задачі в цілих числах (якщо, звичайно, цілочислові параметри умов). Однак у загальному випадку умова цілочислових значень, яка додається до звичайних задач лінійного програмування, суттєво ускладнює її розв'язування.

Здавалось на перший погляд, що для задач цілочислового програмування розв'язок можна знайти, округливши знайдений розв'язок відповідної лінійної задачі, утвореної з заданої відкиданням умови цілочислових значень. Слід зазначити, що таким способом побудований план часто дуже далекий від оптимального, що видно з рис. 7.1.

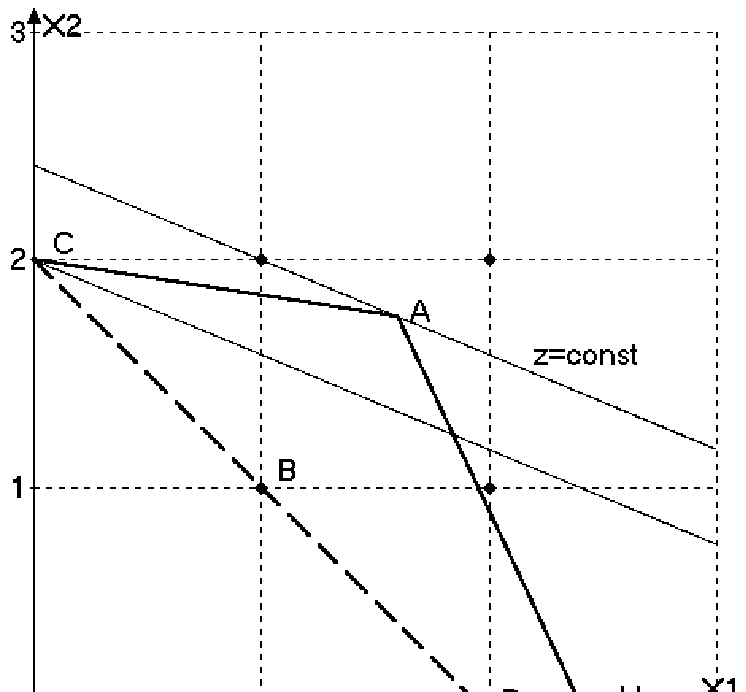



Рис. 7.1

Справді, оптимум без урахування умови цілочислових значень дає точка $A(1{,}6;1{,}75)$. Округлення до цілих значень координат, які задовольняють обмеження, дає точку $B(1;1)$.

Проте, справжнім оптимальним планом цілочислової задачі є точка $C=(0;2)$.

Зауважимо, що множиною планів лінійної цілочислової задачі буде система точок з цілочисловими координатами, які належать опуклому многограннику допустимих розв'язків відповідної нецілочислової задачі. Якби можна було визначити гіперплощини, які проходять через зовнішні точки згаданої системи цілочислових точок так, що всі інші точки згаданої системи потрапили в середину нового опуклого многогранника, то задачу можна було б розв'язати як звичайну лінійну за допомогою симплексного методу. Справді, у цьому разі всі крайні точки опуклого многогранника були б цілочисловими і розв'язок можна було б знайти за скінчене число кроків. На рис. 7.1 шуканою гіперплощиною є пряма $CD$. Вона відтинає від множини планів лінійної задачі $\Omega = OCAH$ частину $CAHD$, яка не містить цілочислових точок, внаслідок чого утворюється множина планів $OCD$, усі вершини якої мають цілочислові координати. Ця ідея у вигляді методу послідовного відтинання тих частин початкового многогранника планів нецілочислової задачі, що не містять допустимих цілочислових планів, лежить в основі методу Гоморі, який ми розглянемо в наступному параграфі.

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовуються три основні групи методів:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи;
- наближені методи.

Методи розв'язування задач цілочислового програмування базуються на використанні обчислювальних можливостей методів лінійного програмування. Зазвичай алгоритми цілочислового програмування містять три кроки.

Крок 1. „Послаблення” простору допустимих розв’язків задачі цілочислового лінійного програмування шляхом заміни будь-якої бінарної змінної $x$ неперервним обмеженням $0 \le x \le 1$ і відкиданням вимоги цілочислових значень для всіх інших змінних. Внаслідок отримується звичайна задача лінійного програмування.

Крок 2. Розв’язування задачі лінійного програмування і знаходження її оптимального розв’язку.

Крок 3. Маючи неперервний оптимальний розв’язок, додають спеціальні обмеження, які ітераційним шляхом змінюють простір допустимих розв’язків задачі лінійного програмування таким чином, щоб нарешті отримати оптимальний розв’язок, який задовольняє вимогам цілочислових значень.

*Методи відтинання*, основним з яких є метод Гоморі, реалізуються шляхом побудови на певних етапах алгоритму додаткових лінійних обмежень-нерівностей, які і визначають відтинаючі гіперплощини. Додаткові обмеження повинні задовольняти двом необхідним умовам.

*Умова правильності* полягає в тому, що додатковому обмеженню повинні задовольняти всі плани цілочислової задачі, тобто всі цілочислові плани відповідної нецілочислової задачі.

*Умова відтинання* полягає в тому, що цьому обмеженню не повинен задовольняти план відповідної нецілочислової задачі.

Різні алгоритми методів відтинання відрізняються саме способами побудови додаткових обмежень. Вони застосовуються лише до лінійних цілочислових (чи дискретних) задач та мають ряд недоліків, серед яких відзначимо повільну збіжність. Однак для розв’язування певних типів задач вони можуть успішно застосовуватись.

*Комбінаторні методи* цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв’язків. Тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого пошуку оптимуму на дискретній множині планів задачі, на кожному кроці якого виключається з розгляду значна кількість неоптимальних планів.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод віток і границь. Суть методу полягає в тому, що множину планів задачі розбивають на ряд підмножин. Для кожної з цих множин знаходять оцінку цільової функції по оптимуму, що являє собою самостійну, але, як правило, більш просту, ніж основна, задачу. Підмножини, які дають явно погані оцінки, не розглядаються. Далі процедуру повторюють доти, поки не знаходять підмножину, яка складається з одного оптимального плану.

Способи розбиття сукупностей планів на підмножини та методи одержання оцінок цільової функції можуть бути дуже різноманітними і їх вибір залежатиме від конкретних умов дослідження. Серед комбінаторних методів можна відмітити метод послідовного аналізу варіантів, метод вектора спаду і метод Беллмана, який застосовується в динамічному програмуванні.

Комбінаторні методи використовуються і для розв’язування дискретних нелінійних задач. Певним їх недоліком є те, що кожен метод виявляється найкращим для досить вузького класу.

Для розв’язування задач із булевими змінними застосовують комбіновані методи, причому оскільки змінні є булевими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

*Наближені методи* знаходження оптимального плану цілочислових задач часто дозволяють за меншого обсягу обчислень та спрощення відповідних алгоритмів знайти шуканий розв’язок. Самий простий з них – звичайний метод лінійного програмування. У випадку, якщо компоненти оптимального розв’язку виявляються нецілочисловими, їх округлюють до найближчих цілих чисел.

Цей метод застосовується тоді, коли окрема одиниця сукупності складає малу частину об’єму всій сукупності. В протилежному випадку округлення може привести до досить далекого від оптимального цілочислового значення (рис. 7.1). Нехай, наприклад, у результаті розв'язування задачі про поєднання галузей у сільськогосподарському підприємстві дістали, що воно потребує 1235,6 корів. Округливши це значення корів до 1236, не припустимося значної похибки. Проте , скажімо, у разі розв'язування як неперервної задачі про сушильний цех, що може бути обладнаний агрегатами трьох типів, дістали $x_1 = 2{,}6$, $x_2 = 4{,}3$ і $x_3 = 0{,}7$, будь які округлення недопустимі.

*Загальна задача цілочислового лінійного програмування* записується так:

Знайти максимум або мінімум функції

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij} \to \max(\min); \tag{7.1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = b_i \,,\ i = 1, 2, \ldots, m; \tag{7.2}$$

$$x_j \geq 0 \,,\ j = 1, 2, \ldots, n; \tag{7.3}$$

$$x_j \text{ – цілі, } j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.4}$$

## 7.2. МЕТОД ГОМОРІ

Існує два алгоритми методу Гоморі. Перший алгоритм застосовується для розв'язування повністю цілочислової задачі, в той час як другий – придатний для розв'язування і частково цілочислових задач. Дальтон та Ллевелін модифікували другий алгоритм Гоморі для розв'язування задач дискретного програмування, в яких кожна чи деякі змінні $x_j$ повинні приймати значення чисел з певних дискретних множин $x_j \in M_j$, $M_j = (m_{j1}, m_{j2}, \ldots, m_{jk})$.

Введемо означення.

***Цілою частиною числа*** $a$ ***називають найбільше ціле число, яке менше або дорівнює йому (позначають*** $[a]$***).***

***Дробовою частиною числа*** $a$ ***називають різницю між числом*** $a$ ***та її цілою частиною (позначають*** $\{a\}$***):***

$$\{a\} = a - [a].$$

Наприклад, для числа $\frac{7}{4}$ ціла частина $\left[\frac{7}{4}\right] = 1$, дробова частина дорівнює $\left\{\frac{7}{4}\right\} = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$. Для числа $-\frac{9}{5}$ ціла частина $\left[-\frac{9}{5}\right] = -2$, дробова частина дорівнює $\left\{-\frac{9}{5}\right\} = -\frac{9}{5} - (-2) = \frac{1}{5}$.

Очевидно, що $\{a\} \ge 0$, причому $\{a\} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a$ – ціле число.

В теорії чисел для дробової частини числа виводять такі властивості:

1) $\{a + b\} \le \{a\} + \{b\}$;

2) якщо $k \ge 0$ – ціле, то $\{k \cdot a\} \le k \cdot \{a\}$.

Властивості 1) і 2) дають змогу записати нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \ge \{b_i\}, \tag{7.5}$$

яку називають нерівністю Гоморі. Вона відіграє важливу роль у пошуку цілочислових розв'язків. Наприклад, обмеження задачі має вигляд:

$2{,}3x_1 + 0{,}7x_2 - 1{,}4x_3 + x_4 = 9{,}1$.

Нерівність Гоморі перетворює його в інше обмеження:

$\{2{,}3\}x_1 + \{0{,}7\}x_2 + \{-1{,}4\}x_3 + \{1\}x_4 \ge \{9{,}1\}$,

$0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}6x_3 \ge 0{,}1$.

***Перший алгоритм методу Гоморі.***

1. Знаходять розв'язок послабленої, тобто задачі без вимог цілочислових значень змінних, тобто задачі (7.1) – (7.3).

2. Якщо оптимальний план цілочисловий, то задача розв’язана. У протилежному випадку вибирають базисну змінну з найбільшою дробовою частиною і за обмеженням цієї базисної невідомої складають нерівність Гоморі (7.5), яка й буде додатковим обмеженням. Це додаткове обмеження задовольняє умові правильності та умові відтинання.
3. Додаткове обмеження-нерівність за допомогою введення додаткової невід’ємної цілочислової змінної перетворюють у рівносильне обмеження-рівняння

$$-\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}x_j + x_{n+1} = -b_i$$

і включають його в систему обмежень (7.2).

4. Здобуту розширену задачу розв’язують і повертаються до пункту 2).

Процес повторюється доти, доки розв’язок не буде цілочисловим або симплексні таблиці не покажуть, що задача не має розв’язку.

Якщо в процесі розв’язування з’явиться рівняння, що виражає базисну змінну через вільні, з нецілим вільним членом і цілими іншими коефіцієнтами, то відповідне рівняння не має розв’язків в цілих числах. В цьому випадку і дана задача не має цілочислового оптимального розв’язку.

Важливо підкреслити, що застосування першого алгоритму Гоморі передбачає, що всі змінні, включаючи додаткові, є цілочисловими. Це означає, що даний алгоритм можна застосовувати тільки до розв’язування повністю цілочислових задач.

Детальніше перший алгоритм Гоморі розглянемо на прикладі.

---

**Приклад 7.1.** На придбання обладнання для нової виробничої дільниці виділено 20 тис. грн. Обладнання можна розмістити на площі, меншій ніж 38 м². Підприємство може замовити обладнання двох типів *A* та *B* з такими даними:

*A* – вартість 5 тис. грн.; потребує площі 8 м$^2$; випускає 7 тис. од. продукції за зміну;

*B* – вартість 2 тис. грн.; потребує площі 4 м$^2$; випускає 3 тис. од. продукції за зміну.

Треба розрахувати оптимальний варіант придбання обладнання, який би забезпечив максимальний обсяг продукції.

*Розв'язання*. Позначимо через $x_1$ кількість одиниць обладнання *A*, через $x_2$ – *B*, тоді математичну модель задачі формуємо таким чином:

знайти максимум цільової функції

$$z = 7x_1 + 3x_2 \to \max$$

за таких обмежень:

$$5x_1 + 2x_2 \le 20,$$

$$8x_1 + 4x_2 \le 38,$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \text{ – цілі.}$$

Запишемо канонічну форму задачі:

$$z - 7x_1 - 3x_2 = 0,$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20,$$

$$8x_1 + 4x_2 + x_4 = 38,$$

$$x_j \ge 0 \text{ – цілі, } j = 1, 2, 3, 4.$$

Знайдемо розв'язок задачі без накладання умови цілочислових значень змінних. Результати обчислень подані в таблиці 7.1:

Таблиця 7.1

| Номер ітерації | Номер рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *I* | *0* | $z$ | 0 | –7 | –3 | 0 | 0 |
| | *1* | $x_3$ | 20 | $\boxed{5}$ | 2 | 1 | 0 |
| | *2* | $x_4$ | 38 | 8 | 4 | 0 | 1 |
| *II* | *0* | $z$ | 28 | 0 | –1/5 | 7/5 | 0 |
| | *1* | $x_1$ | 4 | 1 | 2/5 | 1/5 | 0 |
| | *2* | $x_4$ | 6 | 0 | $\boxed{4/5}$ | –8/5 | 1 |
| *III* | *0* | $z$ | 59/2 | 0 | 0 | 1 | 1/4 |
| | *1* | $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | –1/2 |
| | *2* | $x_2$ | 15/2 | 0 | 1 | –2 | 5/4 |

Остання симплексна таблиця дає оптимальний план, але він не є цілочисловим. Тому переходимо до п.2 алгоритму.

Дробовому плану відповідає обмеження

$$x_2 - 2x_3 + 5/4\, x_4 = 15/2\,.$$

Нерівність Гоморі для нього має вигляд:

$$1/4\, x_4 \geq 1/2\,.$$

Згідно п.3 алгоритму перетворюємо нерівність Гоморі у рівність

$$-\frac{1}{4}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$$

і для зменшення обчислень дописуємо її до канонічної форми оптимальної симплексної таблиці:

$$z = \frac{59}{2} - x_3 - \frac{1}{4}x_4,$$

$$x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 1,$$

$$x_2 - 2x_3 + \frac{5}{4}x_4 = \frac{15}{2},$$

$$-\frac{1}{4}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2},$$

$$x_j \geq 0 \text{ – цілі, } j = 1, 2, \ldots, 5.$$

Далі розв'язуємо отриману розширену задачу (таблиця 7.2):

Таблиця 7.2

| Номер ітерації | Номер рядка | Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *I* | *0* | $z$ | 59/2 | 0 | 0 | 1 | 1/4 | 0 |
| | *1* | $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | –1/2 | 0 |
| | *2* | $x_2$ | 15/2 | 0 | 1 | –2 | 5/4 | 0 |
| | *3* | $x_5$ | –1/2 | 0 | 0 | 0 | $\boxed{-1/4}$ | 1 |
| *II* | *0* | $z$ | 29 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | *1* | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| | *2* | $x_2$ | 5 | 0 | 1 | –2 | 0 | 5 |
| | *3* | $x_4$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | –4 |

Оскільки у нульовому рядку симплексної таблиці немає від'ємних чисел, то план оптимальний. Крім того, він цілочисловий.

$\vec{X}_{opt} = (2, 5, 0, 2, 0)$, $z_{\max} = 29$.

Задачу розв'язано: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $z_{\max} = 29$.

У даному прикладі оптимальне значення можна знайти за допомогою заокруглення на останній ітерації симплексної таблиці 7.1. Але просте заокруглення дає менше значення цільової функції:

$x_1 = 1$, $x_2 = 7$, $z = 7 \cdot 1 + 3 \cdot 7 = 28$.

***Другий алгоритм методу Гоморі.***

Застосовується для частково цілочислових задач лінійного програмування і відрізняється від першого алгоритму лише способом визначення коефіцієнтів додаткового обмеження, яке має форму аналогічну нерівності Гоморі (7.5).

Нехай, умова цілочислових значень накладена на перші $n_1$ компонент плану задачі ($n_1 < n$). Позначимо коефіцієнти при змінних $x_j$ правильного відтинання в другому алгоритмі Гоморі значком „штрих”, тобто $a'_{ij}$, так що замість (7.5) запишемо

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j \ge \{b_i\},$$

де коефіцієнти $a'_{ij}$ слід визначити за формулами:

- $a'_{ij} = \dfrac{\{b_i\}}{1-\{b_i\}}\left(1-\{a_{ij}\}\right)$ для $j \le n_1$ та $\{a_{ij}\} > \{b_i\}$;
- $a'_{ij} = \{a_{ij}\}$ для $j \le n_1$ та $\{a_{ij}\} \le \{b_i\}$;
- $a'_{ij} = a_{ij}$ для $j \ge n_1 + 1$ та $a_{ij} \ge 0$;
- $a'_{ij} = \dfrac{\{b_i\}}{1-\{b_i\}}\left(-a_{ij}\right)$ для $j \ge n_1 + 1$ та $a_{ij} < 0$.

***Алгоритм Дальтона-Ллевеліна.***

Застосовується для розв’язування задач *дискретного лінійного програмування*, де змінні $x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) означені на дискретній множині чисел $M_j = m_{1j}, m_{2j}, \dots, m_{lj}$ (кількість елементів $l$ в множині може бути різним для кожної змінної $x_j$).

Нехай, в оптимальному плані відповідної недискретної задачі змінна $x_{k+i}$ приймає недопустиме значення $m_{s,k+i} < x_{k+i} < m_{s+1,k+i}$. (Нагадаємо, що перші $k$ змінних є вільними, а останні $n-k=m$ – базисними, де $m$ – кількість основних обмежень задачі). Тоді правильне відтинання має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j \ge b_i - m_{s,k+i},$$

де коефіцієнти $a'_{ij}$ визначаються за формулами:

- $a'_{ij} = a_{ij}$, якщо $a_{ij} \ge 0$;
- $a'_{ij} = \dfrac{b_i - m_{s,k+i}}{m_{s+1,k+i} - b_i}\left(-a_{ij}\right)$, якщо $a_{ij} < 0$.

## 7.3. Метод віток і границь

Ефективнішим за метод Гоморі розв'язування задач цілочислового програмування є *метод віток і границь* – один з комбінаторних методів. Його суть полягає у впорядкованому переборі варіантів і розгляданні лише тих з них, які виявляються за певними ознаками перспективними, та відкиданні безперспективних варіантів.

Алгоритм методу віток і границь такий: множину допустимих планів деяким способом розбивають на підмножини, кожна з яких таким же способом знову розбивається на підмножини. Процес продовжується до тих пір, поки не отримується оптимальний цілочисловий розв'язок вихідної задачі.

Розглянемо задачу цілочислового програмування (7.1) – (7.4). Нехай задача є задачею максимізації. Спочатку, як і в разі методу Гоморі, розв'язується послаблена задача (7.1) – (7.3) без умови цілочислових значень змінних (позначимо її ЛП0). З цією метою застосовується симплексний метод.

Задамо нижню границю оптимального значення цільової функції $z$ вихідної задачі рівною $-\infty$ (у випадку задачі мінімізації в алгоритмі необхідно замінити нижню границю верхньою, початкове значення якої $+\infty$). Нехай для визначеності, що тільки одна компонента $x_s^*$ оптимального плану задачі ЛП0 не цілочислова. Тоді з області допустимих планів задачі ЛП0 виключається область

$$\left[x_s^*\right] < x_s < \left[x_s^*\right] + 1,$$

де $\left[x_s^*\right]$ – ціла частина числа $x_s$. В результаті із задачі ЛП0 формують дві задачі ЛП1 і ЛП2, які відрізняються одна від одної тим, що в задачі ЛП1 додано обмеження $x_s \le \left[x_s^*\right]$, а в задачі ЛП2 – обмеження $x_s \ge \left[x_s^*\right] + 1$. Це означає, що симплексним методом розв'язуватимемо дві такі задачі:

ЛП1: $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_s \le \left[x_s^*\right];$$

ЛП2: $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_s \ge \left[x_s^*\right] + 1.$$

Якщо ми продовжимо „розумно" виключати області, які не містять цілочислових розв'язків, шляхом введення відповідних обмежень, то врешті-решт отримуємо задачу лінійного програмування, оптимальний план якої задовольняє умові цілочислових значень змінних. Іншими словами, будемо розв'язувати вихідну цілочислову задачу шляхом розв'язування послідовності неперервних задач лінійного програмування.

Нові обмеження $x_s \le \left[x_s^*\right]$ і $x_s \ge \left[x_s^*\right] + 1$ взаємно виключають одне інше, так що задачі ЛП1 і ЛП2 необхідно розглядати як незалежні задачі лінійного програмування. В цьому випадку $x_s$ називається *змінною розгалуження*.

Оптимальний план вихідної цілочислової задачі знаходиться в області допустимих планів або задачі ЛП1, або задачі ЛП2. Отже, обидві задачі повинні бути розв'язані.

Якщо один із знайдених оптимальних планів задач ЛП1, ЛП2 задовольняє умові цілочислових значень, то цей план є розв'язком вихідної підзадачі. Інакше, пошук розв'язку триває.

Для подальшого розгалуження беруть задачу з найбільшим значенням цільової функції (і навпаки – з найменшим значенням цільової функції в разі її мінімізації). Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку.

Алгоритм методу віток і границь безпосередньо поширюється на задачі частково-цілочислового лінійного програмування. Якщо деяка змінна є неперервною, то її просто не обирають у якості змінної розгалуження. Допустима підзадача визначає нову границю для значення цільової функції, якщо значення дискретних змінних є цілочисловими і значення цільової функції поліпшено у порівнянні з поточною границею.

Розглянемо застосування методу віток і границь на прикладі.

---

**Приклад 7.2.**

$$z = 350x_1 + 150x_2 \to \max,$$

$$25x_1 + 10x_2 \le 100,$$

$$40x_1 + 20x_2 \le 190,$$

$$x_1, x_2 \ge 0,$$

$$x_1, x_2 \text{ – цілі.}$$

*Розв'язання.* Відкинувши умову цілочислових значень змінних, дістанемо симплексним методом розв'язок задачі ЛП0 (пропонуємо читачеві зробити це самостійно):

$$x_1 = 1,\ x_2 = 7\frac{1}{2},\ z = 1475.$$

Отже, допустиме ціле значення змінної $x_2$ має задовольняти одну з нерівностей

$$x_2 \le \left[7\frac{1}{2}\right] = 7 \text{ або } x_2 \ge \left[7\frac{1}{2}\right] + 1 = 8.$$

Далі приєднуємо до останньої симплексної таблиці задачі ЛП0 кожне з цих обмежень і розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі ЛП1 (з додатковим обмеженням $x_2 \le 7$) і ЛП2 (з додатковим обмеженням $x_2 \ge 8$). Для задачі ЛП1 оптимальним буде розв'язок:

$$x_1 = 1{,}2,\ x_2 = 7,\ z = 1470.$$

Для задачі ЛП2:

$$x_1 = 0{,}75,\ x_2 = 8,\ z = 1462{,}5.$$

Оскільки цілочислового плану не знайдено, процес необхідно продовжити, взявши для наступного розгалуження задачу ЛП1, оптимальний план якої дає більше значення цільової функції (змінна розгалуження – $x_1$).

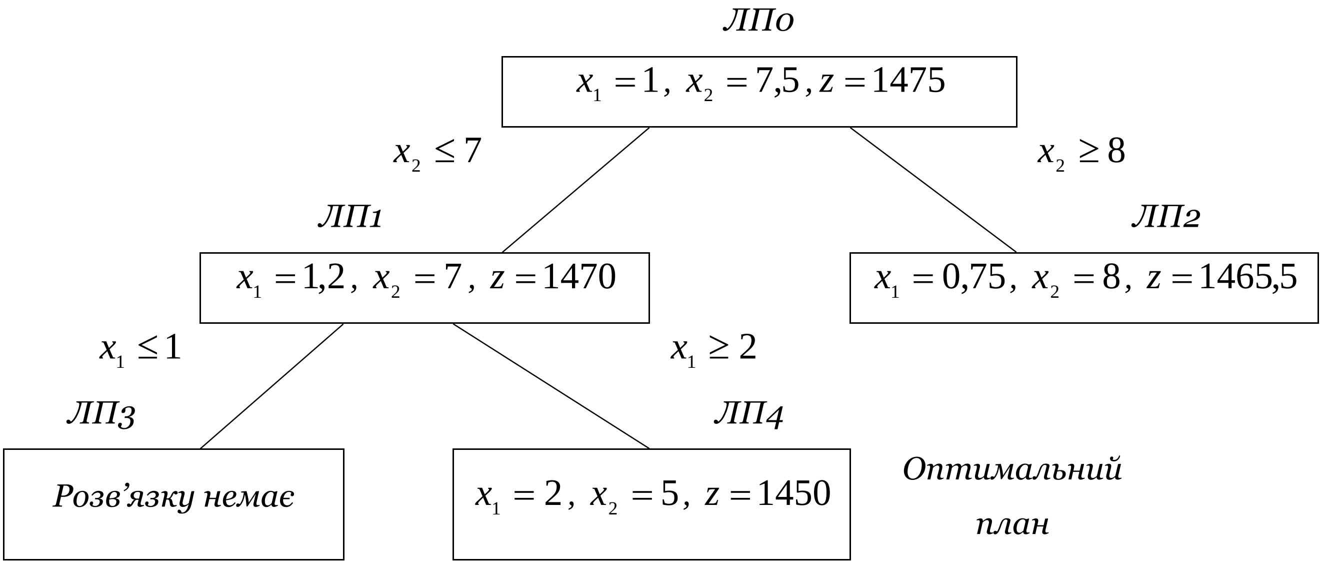
Далі розв'язуємо задачі ЛП3 і ЛП4, приєднуючи обмеження

$$x_1 \le 1 \text{ і } x_1 \ge 2.$$

Після розв'язання цих задач знаходимо оптимальний план

$$\vec{X}_{opt} = (2;5),\ z = 1450.$$

Проілюструємо хід розв'язку задачі схемою:




## 7.4. АДИТИВНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧ З БУЛЕВИМИ ЗМІННИМИ

Будь-яка цілочислова змінна $x$, значення якої не перевищує скінченої границі $u$ (тобто $0 \le x \le u$), може бути виражена через двійкові змінні за допомогою представлення

$$x = 2^0 \cdot y_0 + 2^1 \cdot y_1 + 2^2 \cdot y_2 + \ldots + 2^k \cdot y_k,$$

де $k$ – найменше ціле число, яке задовольняє умові

$$2^{k+1} - 1 \geq u,$$

а $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k$ – булеві змінні.

Це представлення, а також простий алгоритм (описаний нижче) розв'язування задач цілочислового лінійного програмування з булевими змінними породило надію, що загальна задача цілочислового лінійного програмування може бути розв'язана більш ефективно як задача з двійковими змінними. На жаль, цей напрямок розвитку методів цілочислового лінійного програмування не виправдало надій, які покладались на нього.

Вперше спеціальний алгоритм розв'язування задач з двійковими змінними, названий *адитивним*, був запропонований у 1965 році, через сім років після створення методу віток і границь. Спочатку алгоритм не був пов'язаний з методом віток і границь, так як не вимагав розв'язування задач лінійного програмування; його основні операції зводилися лише до додавання і віднімання. Однак, незабаром був знайдений зв'язок між цими алгоритмами. Виявилось, що адитивний алгоритм є спеціальним випадком методу віток і границь.

Задум евристичного аналізу в адитивному алгоритмі вимагає подання задачі з двійковими змінними у зручній формі, яка задовольняє наступним двом вимогам:

1. У виразі цільової функції всі коефіцієнти повинні бути невід'ємними, і цільова функція повинна підлягати мінімізації.
2. Всі обмеження повинні бути нерівності типу „$\leq$”, можливо з від'ємними правими частинами. Ці обмеження перетворюються потім у рівності за допомогою введення неперервних додаткових змінних у ліві частини обмежень.

Будь-яка задача з двійковими змінними може задовольнити цим умовам. Для того, щоб забезпечити невід'ємність коефіцієнтів цільової функції, виконують підстановку $x_j = 1 - x'_j$ для всіх змінних $x_j$ з від'ємними коефіцієнтами в цільовій функції. Обмеження-рівність $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ перетворюється у два обмеження нерівності: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ та $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le -b_i$. Наприклад, рівність $x_1 + x_2 = 8$ замінюється двома нерівностями: $x_1 + x_2 \le 8$ та $-x_1 - x_2 \le -8$.

Наведений нижче приклад демонструє застосування адитивного алгоритму.

---

**Приклад 7.3.** Необхідно розв'язати наступну задачу з двійковими змінними.

$$w = 3y_1 + 2y_2 - 5y_3 - 2y_4 + 3y_5 \to \max,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 \le 4,$$

$$7y_1 + 3y_3 - 4y_4 + 3y_5 \le 8,$$

$$11y_1 - 6y_2 + 3y_4 - 3y_5 \ge 3,$$

$$y_j = 0 \text{ або } 1,\ j = 1, 2, \ldots, 5.$$

*Розв'язання*. Цю задачу неважко представити у формі, що задовольняє адитивному алгоритму. Для цього необхідно виконати наступні дії.

- Множать цільову функцію на (–1), для того щоб перетворити задачу на максимум в задачу на мінімум.
- Множать третє обмеження на (–1), для зміни знаку нерівності.
- Вводять додаткові змінні $s_1$, $s_2$ і $s_3$ для перетворення обмежень в рівності.
- Для того щоб всі коефіцієнти цільової функції були додатні, застосовують підстановки $y_1 = 1 - x_1$, $y_2 = 1 - x_2$, $y_5 = 1 - x_5$, $y_3 = x_3$ і $y_4 = x_4$.

Вказані перетворення приводять до наступної цільової функції (перевірте!)

$$z' = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 8 \to \min .$$

Для зручності будемо ігнорувати константу –8 та замінимо $z' + 8$ на $z$, так що задача набуває наступного виду.

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \min ,$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + s_1 = 1,$$

$$-7x_1 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 + s_2 = -2,$$

$$11x_1 - 6x_2 - 3x_4 - 3x_5 + s_3 = -1,$$

$$x_j = 0 \text{ або } 1,\; j = 1, 2, \ldots, 5,$$

$$s_1, s_2, s_3 \geq 0 .$$

Оскільки, в отриманій після перетворень задачі йдеться про пошук мінімуму цільової функції з додатними коефіцієнтами, логічно, що у початковому плані всі двійкові змінні повинні дорівнювати нулю. В цьому випадку додаткові змінні будуть базисними та їх значення визначаються правими частинами обмежень. Розв'язок подано у таблиці 7.3.

Таблиця 7.3.

| Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 1 | –1 | –1 | 1 | 2 | –1 | 1 | 0 | 0 |
| $s_2$ | –2 | –7 | 0 | 3 | –4 | –3 | 0 | 1 | 0 |
| $s_3$ | –1 | 11 | –6 | 0 | –3 | –3 | 0 | 0 | 1 |
| $z$ | 0 | 3 | 2 | 5 | 2 | 3 | | | |

Застосування адитивного алгоритму вимагає у кожній підзадачі лише зміни стовпчика „ОП" таблиці.

Так як всі двійкові змінні рівні нулю, то додаткові змінні приймають наступні значення:

$$s_1 = 1,\; s_2 = -2,\; s_3 = -1,$$

при цьому $z = 0$. Якби всі додаткові змінні були невід'ємними, можна було б зробити висновок, що отриманий розв'язок, в якому всі двійкові змінні дорівнюють нулю, є оптимальним. Оскільки, деякі додаткові змінні є недопустимими (так як від'ємні), необхідно збільшити значення однієї або декількох двійкових змінних до 1, для того щоб отримати допустимий план (або прийти до висновку, що задача не має допустимого розв'язку).

Збільшення значення двійкових змінних до 1 в адитивному алгоритмі відбувається по черзі. Обрана змінна називається *змінною розгалуження*, її вибір ґрунтується на використанні спеціальних тестів.

Змінна розгалуження повинна зменшувати абсолютне значення від'ємних додаткових змінних. Як видно з таблиці 7.3, змінна $x_3$ не може бути обрана в якості змінної розгалуження, так як її коефіцієнти у всіх обмеженнях невід'ємні. Отже, поклавши $x_3 = 1$, ми лише збільшимо від'ємне значення змінної $s_2$ та не змінимо від'ємне значення $s_3$. Всі інші змінні мають принаймні один від'ємний коефіцієнт у другому і третьому обмеженнях. Отже, комбінація цих змінних може привести до додатних значень додаткових змінних. Таким чином, лише змінні $x_1$, $x_2$, $x_4$ і $x_5$ можна розглядати в якості можливих кандидатів на змінну розгалуження.

Вибір змінної розгалуження з усіх можливих претендентів заснований на використанні *міри недопустимості додаткової змінної* (*тест на верхню границю*). Ця міра, яка заснована на припущені, що значення двійкової змінної $x_l$ буде збільшено до 1, визначається співвідношенням

$$I_l = \sum_{i=1}^{m} \min(0; s_i - a_{il}),$$

де $s_i$ – поточне значення додаткової змінної, $a_{il}$ – коефіцієнт при змінній $x_l$ в $i$-му обмеженні.

В дійсності $I_l$ є не що інше, як сума від'ємних додаткових змінних, які є результатом збільшення значення змінної $x_l$ до 1. Складна на вигляд формула може бути спрощена:

$$I_l = \sum_{i=1}^{m} \left( \textit{від'ємне значення } s_i \textit{ при заданому } x_l = 1 \right).$$

Наприклад, якщо покласти $x_1 = 1$, то отримуємо $s_1 = 1 - (-1) = 2$, $s_2 = -2 - (-7) = 5$ і $s_3 = -1 - 11 = -12$. Отже, $I_1 = -12$. Аналогічно, $I_2 = -2$, $I_4 = -1$ і $I_5 = 0$ (нагадаємо, що змінна $x_3$ була виключена з претендентів на змінну розгалуження, як безперспективна). Так як $I_5$ має найменшу міру недопустимості, змінна $x_5$ обирається в якості змінної розгалуження. На рис. 7.2 зображені дві вітки, які відповідають $x_5 = 0$ і $x_5 = 1$, що утворюють вузли 1 та 2. Вершина 2 дає допустиме значення додаткових змінних $s_1 = 2$, $s_2 = 1$, $s_3 = 2$ і $z = 3$. Отже, вузол 2 протестований, і значення $z^* = 3$ визначає поточну верхню границю оптимального значення цільової функції.

Переходимо до вузла 1, для якого $x_5 = 0$. Тут маємо $s_1 = 1$, $s_2 = -2$ і $s_3 = -1$, тобто розв'язок недопустимий. Змінні $x_1$, $x_2$, $x_3$ і $x_4$ є кандидатами на змінну розгалуження. (Відмітимо, що хоча розв'язки у вузлах 0 і 1 ідентичні, вузол 1 відрізняється тим, що змінна $x_5$ не є більше претендентом на розгалуження). Як і у вершині 0, тут змінна $x_3$ безперспективна, так як не зменшує за абсолютною величиною від'ємне значення додаткових змінних $s_2$ і $s_3$. Крім того, значення $x_3 = 1$ приводить до значення цільової функції, рівне 5, що гірше поточного значення верхньої границі $z^* = 3$. Змінна $x_1$ також безперспективна, так як відповідний коефіцієнт у цільовій функції дорівнює 3, тому значення $x_1 = 1$ не приводить до покращення поточного значення цільової функції $z^* = 3$. Для змінних $x_2$ і $x_4$, що залишились, обчислюємо міру недопустимості: $I_2 = -2$, $I_4 = -1$. Отже, у вузлі 1 змінною розгалуження буде $x_4$.

На рис. 7.2 показаний весь адитивний алгоритм задачі, коли всі вузли протестовані і метод віток і границь закінчує роботу. Оптимальний план знайдено у вузлі 2, тобто $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$ і $z = 3$. Звідси отримуємо розв’язок вихідної задачі:

$$y_1 = y_2 = 1,\ y_3 = y_4 = y_5 = 0,\ w = 5.$$

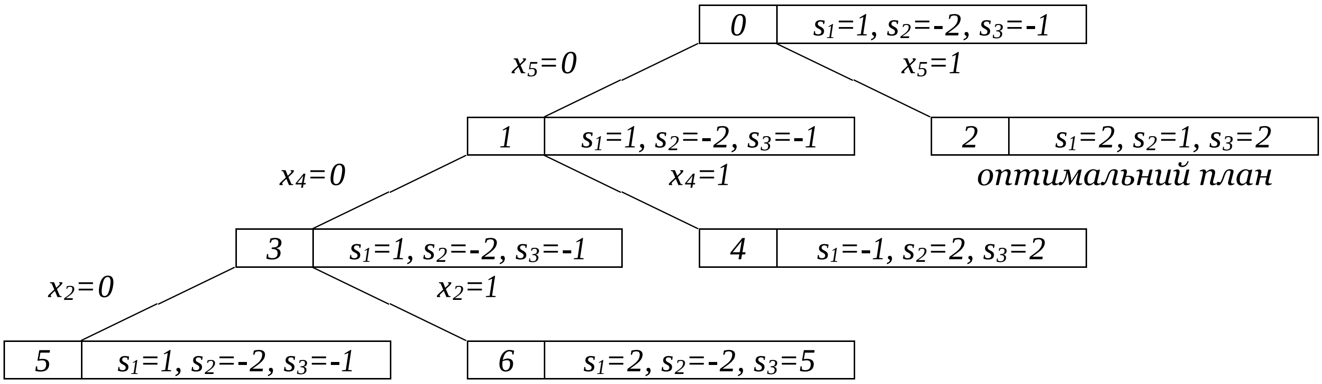



Рис. 7.2

Тести, які запропоновані в прикладі 7.3, є явно евристичними, та їх ефективність у виключені змінних, які не можуть ініціювати процес розгалуження, залежить від того, наскільки „розумними” ми їх конструюємо. В дійсності повний адитивний алгоритм містить більш сильні тести, ніж ті, які показані в прикладі 7.3. Однак, всі вони засновані на евристичних міркуваннях.

## Питання для самоконтролю

1. Які задачі математичного програмування називаються цілочисловими? Різниця між цілочисловим та дискретним програмуванням. Навести приклади.
2. Методи розв’язування задач цілочислового програмування. Які основні кроки їх алгоритмів?
3. Зміст поняття „правильне відтинання”.
4. Як визначаються поняття цілої та дробової частини числа?
5. Перший алгоритм методу Гоморі.
6. Другий алгоритм методу Гоморі.
7. Алгоритм Дальтона-Ллевеліна.
8. Основні засади методу віток і границь.
9. Представлення цілого числа через двійкові змінні.
10. Основні засади адитивного алгоритму.

## Вправи

Методом Гоморі розв'язати задачі цілочислового лінійного програмування і порівняти розв'язок з розв'язком, який отриманий шляхом округлення відповідного неперервного розв'язку:

7.1. $z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$,

$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10$,

$x_1 + 4x_2 + x_5 = 11$,

$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 13$,

$x_j \geq 0$ – цілі, $j = 1, 2, \ldots, 5$.

7.2. $x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 \to \max$,

$x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 \leq 10$,

$3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 \leq 14$,

$x_j \geq 0$ – цілі, $j = 1, 2, 3, 4$.

7.3. $z = 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \to \max$,

$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 23$,

$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 17$,

$x_j \geq 0$ – цілі, $j = 1, 2, 3, 4$.

7.4. $z = -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 7x_4 \to \max$,

$x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 12$,

$2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 7$,

$x_j \geq 0$ – цілі, $j = 1, 2, 3, 4$.

7.5. $z = x_1 + 2x_2 + x_5 \to \min$,

$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5$,

$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$,

$x_3 - x_4 + x_6 = 1$,

$x_j \geq 0$ – цілі, $j = 1, 2, \ldots, 6$.

7.6. $z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$,

$x_1 - x_2 + x_3 \le 4$,

$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$,

$x_1 - x_2 - x_3 \le -1$,

$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$ – цілі.

7.7. $z = -5x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$,

$3x_1 + 7x_2 + x_3 \le 4$,

$-2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \ge 2$,

$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$ – цілі.

7.8. $z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$,

$3x_1 + 2x_2 \ge 6$,

$2x_1 - 3x_2 \ge -6$,

$x_1 - x_2 \le 4$,

$x_1,\ x_2 \ge 0$ – цілі.

7.9. $z = 3x_1 - x_2 - 5x_3 \to \max$,

$5x_1 + x_2 + 4x_3 = 7$,

$3x_1 + 2x_3 \le 4$,

$x_1 - 3x_3 \le 3$,

$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$ – цілі.

7.10. $z = 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 \to \min$,

$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \ge 3$,

$-2x_2 + 3x_3 \le 4$,

$-3x_2 + 4x_3 \le 7$,

$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$ – цілі.

Методом віток і границь розв’язати задачі цілочислового лінійного програмування і порівняти розв’язок з розв’язком, який отриманий шляхом округлення відповідного неперервного розв’язку:

7.11. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$,

$x_1 + x_2 \le 13$,

$x_1 - x_2 \le 6$,

$-3x_1 + x_2 \le 9$,

$x_1,\ x_2 \ge 0$ – цілі.

7.12. $5x_1 + 7x_2 \to \min$,

$-3x_1 + 14x_2 \le 78$,

$5x_1 - 6x_2 \le 26$,

$x_1 + 4x_2 \ge 25$,

$x_1,\ x_2 \ge 0$ – цілі.

7.13. $z = x_1 + 4x_2 \to \max$,

$5x_1 + 2x_2 \le 10$,

$3x_1 + 7x_2 \le 21$,

$x_1,\ x_2 \ge 0$ – цілі.

7.14. $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \to \max$,

$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$,

$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7$,

$x_j \ge 0$ – цілі, $j = 1, 2, 3, 4$.

7.15. $z = 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \to \min$,

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 5$,

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 2$,

$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \ge 3$,

$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$ – цілі.

7.16. $z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$,

$|-x_1 + 10x_2 - 3x_3| \ge 15$,

$2x_1 + x_2 + x_3 \le 10$,

$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$ – цілі.

Задачі 7.17–7.20 розв'язати за допомогою адитивного алгоритму:

7.17. $z = 3x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$,

$-x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$,

$4x_2 - 3x_3 \le 2$,

$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 3$,

$x_1$, $x_2$, $x_3 = 0$ або 1.

7.18. $z = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \min$,

$8x_1 - 4x_2 - x_3 \ge 5$,

$6x_1 - 3x_2 - 2x_3 \ge 2$,

$-2x_1 + 9x_2 + 7x_3 \ge 4$,

$x_1$, $x_2$, $x_3 = 0$ або 1.

7.19. $z = -5x_1 + 7x_2 + 10x_3 \to \min$,

$-x_1 - 3x_2 + 5x_3 \ge 0$,

$2x_1 + 6x_2 - 3x_3 \ge 4$,

$-x_2 + 2x_3 \ge 2$,

$x_1$, $x_2$, $x_3 = 0$ або 1.

7.20. $z = 2x_1 + x_2 \to \max$,

$10x_1 + 10x_2 \le 9$,

$10x_1 + 5x_2 \ge 1$,

$x_1$, $x_2 = 0$ або 1.

7.21. Фірма випускає три види виробів *А*, *Б*, *В*, причому плановий випуск за зміну складає 9 шт. виробу *А*, 7 шт. виробу *Б*, 6 шт. виробу *В*.

Ресурси на зміну: 51 од. виробничого обладнання, 48 од. сировини, 67 од. електроенергії. Їх витрати на один виріб подані у таблиці:

| Ресурси | Виріб *А* | Виріб *Б* | Виріб *В* |
|---|---|---|---|
| Обладнання | 3 | 2 | 0 |
| Сировина | 1 | 4 | 0 |
| Електроенергія | 3 | 3 | 1 |

Прибуток від реалізації виробу *А* – 40 ум. од., *Б* – 50 ум. од., *В* – 10 ум. од.

Визначити, скільки виробів кожного виду треба виготовляти, щоб отримати максимальний прибуток від виробів, що виготовлені понад план.

7.22. Для придбання обладнання для сортування зерна фермер виділяє 34 ум. од. Обладнання повинно бути розміщено на площі, яка не перевищує 60 м$^2$.

Фермер може замовити обладнання двох видів: менш потужні машини *А* вартістю 3 ум. од., що вимагають площу 3 м$^2$ (з урахування проходів) і забезпечують продуктивність 2 т зерна за зміну, і більш потужні машини *Б* вартістю 4 ум. од., що займають площу 5 м$^2$ та забезпечують за зміну сортування 3 т зерна.

Визначити оптимальний варіант придбання обладнання, який забезпечив би фермеру максимум загальної продуктивності сортування, якщо він може придбати не більше 8 машин типу *Б*.

7.23. Три типи літаків необхідно розподілити між чотирма авіалініями. У таблиці наведені дані місячного об’єму перевезень кожним літаком на кожній авіалінії і відповідні експлуатаційні витрати:

7.24.

| Тип літака | К-сть літаків | Місячний об'єм перевезень одним літаком за авіалініями | | | | Експлуатаційні витрати на один літак за авіалініями | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 50 | 15 | 10 | 20 | 50 | 15 | 20 | 25 | 40 |
| 2 | 20 | 30 | 25 | 10 | 17 | 70 | 28 | 15 | 45 |
| 3 | 30 | 25 | 50 | 30 | 45 | 40 | 70 | 40 | 65 |

Розподілити літаки за авіалініями так, щоб при мінімальних сумарних експлуатаційних витратах перевезти по кожній з чотирьох авіаліній не менше 300, 200, 1000 і 500 од. вантажу відповідно.

# РОЗДІЛ 8
# НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

## 8.1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У задачах лінійного програмування, які розглядалися раніше, всі змінні входили як до системи обмежень, так і до цільової функції, у першому степені. Тому ці задачі були досить простими у постановці і за методами розв'язування.

Лінійні моделі є ефективним засобом дослідження широкого кола задач управління та економіки за умови короткотермінових проміжків або стабільного стану системи. Але практичний досвід показує, що гіпотези про лінійну залежність можуть лише наближено характеризувати об'єкт дослідження. У багатьох випадках залежності між основними параметрами системи мають суттєво нелінійний характер. Наприклад, нехай критерієм оптимальності є собівартість одиниці виробленої продукції. Очевидно, що вона залежить від розміру підприємства. Так, із збільшенням обсягу продукції собівартість її зменшується. Проте таке зменшення не безмежне. Настає такий момент, коли внутрішні витрати підприємства починають зростати (збільшуються витрати на перевезення, збереження продукції тощо), що у свою чергу призводить до збільшення собівартості. Функція, яка і спадає, і зростає, вже не може бути лінійною. Зиск від реалізації продукції виявляється нелінійною функцією ціни: чим нижче ціна, тим більше попит і, як наслідок, більше обсяг реалізації. Різного виду затрати праці та матеріальних ресурсів, як правило, є нелінійними функціями точності, надійності та інших характеристик якості продукції виробництва. Ретельний облік норм споживання певних ресурсів свідчить про необхідність використання моделей нелінійних обмежень як більш узгоджених з практикою.

Отже, лінійні моделі ми можемо вважати першим наближенням реальної задачі. У тих випадках, коли існує широкий вибір допустимих планів і наше уявлення про характер оптимального зв'язку не зовсім повне, лінійні моделі можуть бути неадекватними.

Математична модель задачі нелінійного програмування в загальному вигляді формулюється наступним чином:

знайти вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, який задовольняє систему обмежень

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m_1, \tag{8.1}$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b_i,\ i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2, \tag{8.2}$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i,\ i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, m \tag{8.3}$$

і за якого досягає екстремуму (найбільшого або найменшого значення) цільова функція

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to extr, \tag{8.4}$$

де $x_j$ – змінні, $j = 1, 2, \ldots, n$; $f, g_i$ – задані функції від $n$ змінних; $b_i$ – фіксовані значення.

Нелінійні задачі математичного програмування не зводяться до певної стандартної форми. Тип задачі визначається типом функцій, які входять до цільової функції і обмежень. Не існує загального універсального методу розв'язування нелінійних задач, подібного до того, яким є симплексний метод для задач лінійного програмування. Ця обставина, а також специфіка окремих типів нелінійних задач зумовили значну різноманітність методів їх розв'язування.

В залежності від виду цільової функції і системи обмежень розроблені спеціальні методи розв'язування, до яких відносяться методи множників Лагранжа, градієнтні методи, опукле і квадратичне програмування, наближені методи, графічний метод.

Із нелінійного програмування найбільш розроблені задачі, в яких система обмежень лінійна, а цільова функція нелінійна. Однак, навіть для таких задач оптимальний розв'язок може бути знайдений для певного класу цільових функцій. Наприклад, коли цільова функція *квадра-*

*тична* (квадратичне програмування), або *сепарабельна*[1], тобто є сумою $n$ функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної, тобто

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right).$$

При цьому слід відмітити, що на відміну від задач лінійного програмування, де точками екстремуму є вершини многогранника розв'язків, в задачах з нелінійною цільовою функцією точки екстремуму можуть знаходитись всередині многогранника, на його ребрі або у вершині.

Якщо система обмежень нелінійна, то область існування планів задачі може бути не опуклою і навіть складатися з кількох окремих частин.

При розв'язуванні задач нелінійного програмування для цільової функції необхідно визначити глобальний максимум або глобальний мінімум. Наявність локальних екстремумів ускладнює розв'язування задач, так як більшість існуючих методів нелінійного програмування не дозволяє встановити, чи є найдений екстремум локальним або глобальним. Тому існує можливість в якості оптимального розв'язку прийняти локальний екстремум, який може суттєво відрізнятися від глобального.

На закінчення відмітимо, що методи нелінійного програмування бувають *прямі* та *непрямі*. Прямими методами оптимальні розв'язки відшукуються у напрямку найшвидшого збільшення або зменшення цільової функції. Типовими для цієї групи методів є градієнтні. Непрямі методи полягають у зведенні задачі до такої, знаходження оптимуму якої вдається спростити. До них належать, насамперед, методи квадратичного та сепарабельного програмування.

Оптимізаційні задачі, на змінні яких не накладаються обмеження, розв'язують методами класичної математики. Оптимізацію з обмеженнями-рівностями виконують методами *зведеного градієнта*, скажімо *методом Якобі* або *методом множників Лагранжа*. У задачах оптимі-

[1] Необхідно зробити наступне зауваження, що поняття сепарабельності тут не має нічого спільного (крім назви) з „класичним" його визначенням з функціонального аналізу.

зації з обмеженнями-нерівностями досліджують необхідні та достатні умови існування екстремуму *Куна-Таккера*.

## 8.2. Графічний метод

Розглянемо приклади розв'язування задач нелінійного програмування з двома змінними, які можуть бути розв'язані графічно. Графічний метод дозволяє більш наочно проілюструвати різні випадки у задачах нелінійного програмування.

***Задача з лінійною цільовою функцією і нелінійною системою обмежень***

**Приклад 8.1.** Знайти глобальний екстремум функції

$$z = 2x_1 + x_2$$

при обмеженнях:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 16,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

*Розв'язання*. Область допустимих розв'язків – частина кола з радіусом 4, яка розташована у першій чверті координатної площини (рис.8.1).

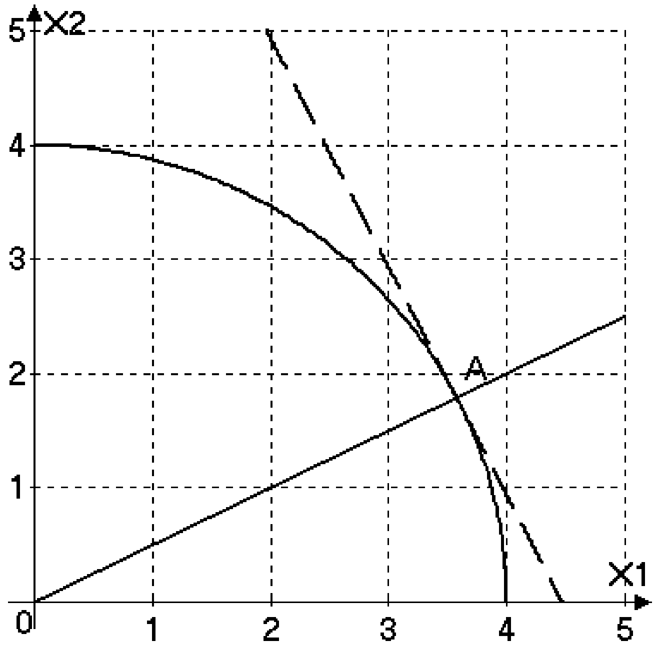



Рис. 8.1

Лініями рівня цільової функції є паралельні прямі з кутовим коефіцієнтом, рівним –2. Глобальний мінімум досягається в точці $O(0;0)$: $z_{\min} = 0$, глобальний максимум – в точці $A$ дотику лінії рівня і кола. Проведемо через точку $A$ пряму, яка перпендикулярна лінії рівня. Пряма проходить через початок координат, має кутовий коефіцієнт 1/2 і рівняння $x_2 = 1/2\, x_1$.

Розв’язуємо систему рівнянь

$$x_1^2 + x_2^2 = 16,$$

$$x_2 = 1/2\, x_1,$$

звідки знаходимо $x_1 = 8\sqrt{5}/5$, $x_2 = 4\sqrt{5}/5$, $z = 16\sqrt{5}/5 + 4\sqrt{5}/5 = 4\sqrt{5}$.

### *Задача з нелінійною цільовою функцією і лінійною системою обмежень*

**Приклад 8.2.** Знайти глобальні екстремуми функції

$$z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при обмеженнях:

$$x_1 + 2x_2 \le 12,$$

$$x_1 + x_2 \le 9,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

*Розв’язання.* Область допустимих розв’язків – $OABD$ (рис 8.2). Лініями рівня будуть концентричні кола з центром у точці $O_1$.

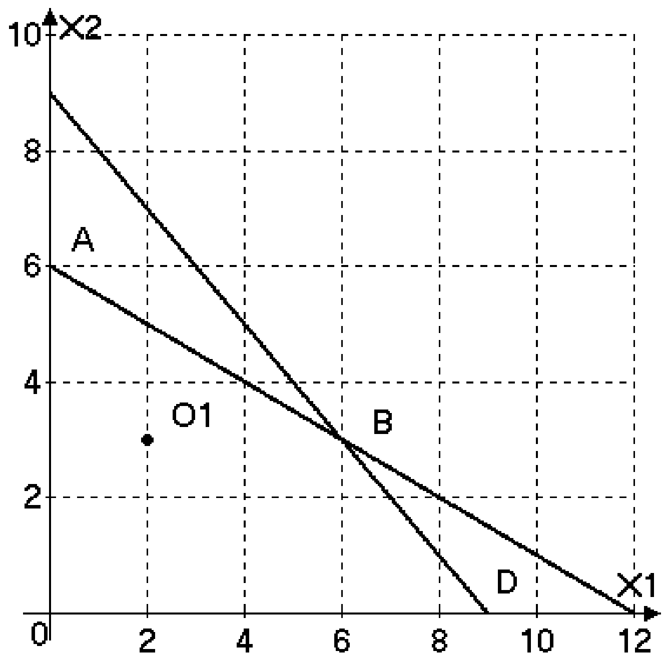



Рис. 8.2

Максимальне значення цільова функція приймає в точці $D(9;0)$, мінімальне – в точці $O_1(2;3)$. Тому

$$z_{\max} = (9-2)^2 + (0-3)^2 = 58.$$

---

**Приклад 8.3.** Знайти глобальні екстремуми функції

$$z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при обмеженнях:

$$2x_1 + 3x_2 \le 14,$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 15,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

*Розв'язання*. Область допустимих розв'язків – $OABD$ (рис. 8.3).

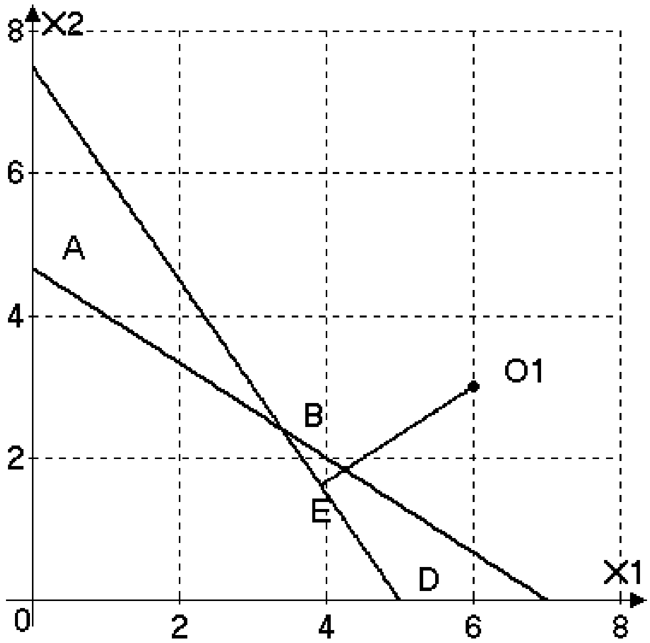



Рис. 8.3

Лінії рівня являють собою концентричні кола з центром у точці $O_1$(6;3).Глобальний максимум знаходиться в точці $O$(0;0) як найбільш віддаленої від точки $O_1$: $z_{\max} = 45$.

Глобальний мінімум досягається в точці $E$, яка знаходиться на перетині прямої $BD$ ($3x_1 + 2x_2 = 15$) і перпендикуляра до цієї прямої, проведеного з точки $O_1$.

Знайдемо координати точки $E$: так як кутовий коефіцієнт прямої $3x_1 + 2x_2 = 15$ дорівнює –3/2, то кутовий коефіцієнт перпендикуляра $O_1E$ дорівнює 2/3. З рівняння прямої, що проходить через дану точку $O_1$ з кутовим коефіцієнтом 2/3, отримуємо

$$(x_2 - 3) = \frac{2}{3}(x_1 - 6), \text{ звідки } 2x_1 - 3x_2 = 3.$$

Розв'язуємо систему рівнянь

$$2x_1 - 3x_2 = 3,$$

$$3x_1 + 2x_2 = 15$$

і знаходимо координати точки $E$: $x_1 = 51/13$, $x_2 = 21/13$. При цьому

$$z_{\min} = 1053/169.$$

***Задача з нелінійною цільовою функцією і нелінійною системою обмежень***

**Приклад 8.4.** Знайти глобальні екстремуми функції

$$z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

при обмеженнях:

$$x_1^2 + x_2^2 \le 16,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

*Розв'язання.* Область допустимих розв'язків є коло з центром у точці $O$(0;0) і радіусом рівним 4, яке розміщено у першій чверті координатної площини (рис. 8.4).

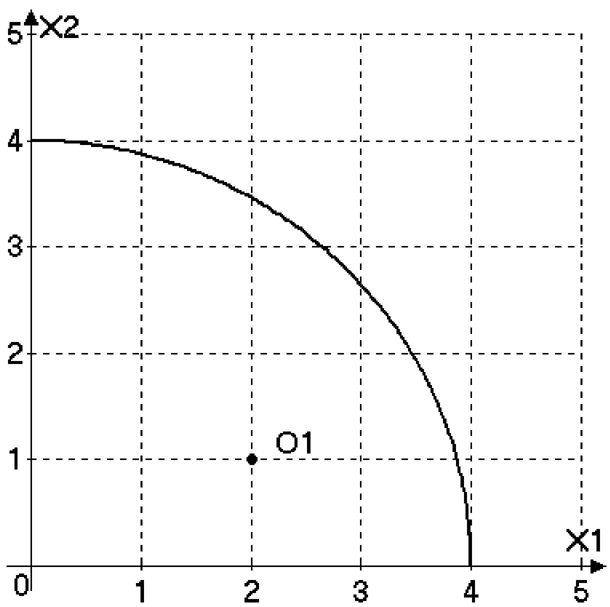



Рис. 8.4

Лініями рівня будуть концентричні кола з центром у точці $O_1$(2;1). Глобальний мінімум досягається в точці $O_1$: $z_{\min} = 0$. Глобальний максимум – в точці $A$(0;4), при цьому

$$z_{\max} = (0-2)^2 + (4-1)^2 = 13.$$

**Приклад 8.5.** Знайти глобальні екстремуми функції

$$z = x_1^2 + x_2^2$$

при обмеженнях:

$$x_1 x_2 \le 4,$$

$$x_1 + x_2 \ge 5,$$

$$x_1 \le 7,$$

$$x_2 \le 6,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

*Розв'язання.* Область допустимих розв'язків не є опуклою і складається з двох частин *ACKD* і *BLME* (рис. 8.5).

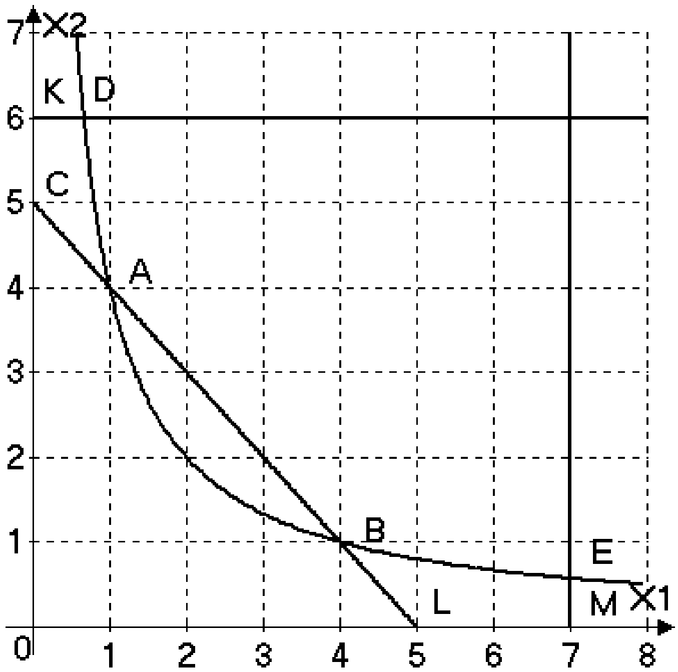



Рис. 8.5

Лініями рівня є концентричні кола з центром в точці *O*(0;0). Знайдемо координати точок *A* і *B*, розв'язуючи систему рівнянь

$$x_1 x_2 = 4,$$

$$x_1 + x_2 = 5.$$

Знаходимо *A*(1;4), *B*(4;1). В цих точках цільова функція має глобальні мінімуми $z_{\min} = 17$.

Знайдемо координати точок *D* і *E*, розв'язуючи системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 4, \\ x_2 = 6 \end{cases} \text{та} \begin{cases} x_1 x_2 = 4, \\ x_1 = 7 \end{cases}.$$

Звідки отримуємо $D(2/3;6)$ і $z(D)=328/9$, $E(7;4/7)$ і $z(E)=2417/49$. Тобто, глобальний максимум знаходиться в точці $E(7;4/7)$: $z_{\max}=2417/49$.

## 8.3. Класичні методи оптимізації

У класичній теорії оптимізації для знаходження точок максимуму і мінімуму (екстремальних точок) функцій в умовах як відсутності, так і наявності обмежень на змінні широко використовується апарат диференціального числення. Методи, які при цьому отримуються, не завжди виявляються зручними при обчислювальних операціях і необхідно шукати інші методи розв'язування. Тому класичні методи часто використовуються не в якості обчислювального засобу, а як основа для теоретичного аналізу алгоритмів (більшості їх) розв'язування задач нелінійного програмування.

Використовуючи класичні методи оптимізації, слід чітко уявляти собі різницю між локальним екстремумом функції, глобальним екстремумом і умовним екстремумом.

Точка $\vec{X}^0=\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\right)$ є *точкою локального максимуму* функції $f\left(\vec{X}\right)$, якщо нерівність

$$f\left(\vec{X}^0+\vec{h}\right)\le f\left(\vec{X}^0\right)$$

виконується для всіх $\vec{h}=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$ таких, що $\left|h_j\right|$ достатньо малі при всіх $j$. Іншими словами, точка $\vec{X}^0$ є точкою максимуму, якщо значення функції $f\left(\vec{X}\right)$ в околу точки $\vec{X}^0$ не перевищує $f\left(\vec{X}^0\right)$.

Аналогічно, точка $\vec{X}^0$ є *точкою локального мінімуму* функції $f\left(\vec{X}\right)$, якщо для визначеного вище вектора $\vec{h}$ має місце нерівність

$$f\left(\vec{X}^0+\vec{h}\right)\ge f\left(\vec{X}^0\right).$$

Саме часткове значення $f\left(\vec{X}^0\right)$ називається *локальним максимумом* (*локальним мінімумом*) функції $f\left(\vec{X}\right)$.

***Необхідна умова локального екстремуму*** формулюється наступним чином.

*Якщо в точці* $\vec{X}^0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ *функція* $f\left(\vec{X}\right)$ *має екстремум, то перші частинні похідні функції у цій точці дорівнюють нулю:*

$$\frac{\partial f\left(\vec{X}^0\right)}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial f\left(\vec{X}^0\right)}{\partial x_2} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial f\left(\vec{X}^0\right)}{\partial x_n} = 0$$

*(існування перших частинних похідних в точці* $\vec{X}^0$ *припускається).*

Точка $\vec{X}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ називається *критичною* (*стаціонарною*) для функції $f\left(\vec{X}\right)$, якщо координати цієї точки задовольняють систему рівнянь

$$\frac{\partial f\left(\vec{X}\right)}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial f\left(\vec{X}\right)}{\partial x_2} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial f\left(\vec{X}\right)}{\partial x_n} = 0.$$

Тому точки локального екстремуму функції $f\left(\vec{X}\right)$, які лежать всередині її області визначення, слід шукати тільки серед критичних точок цієї функції.

Критична точка не обов'язково буде точкою локального екстремуму. Вона може бути точкою перегину (або сідловою точкою).

Нехай критична точка $\vec{X}^0$ підозріла на екстремальність. Розвинемо функцію $f\left(\vec{X}\right)$ в ряд Тейлора в околі точки $\vec{X}^0$:

$$f\left(\vec{X}\right) = f\left(\vec{X}^0\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f\left(\vec{X}^0\right)}{\partial x_i \partial x_j}\left(x_i - x_i^0\right)\left(x_j - x_j^0\right) + O\left(\left|\vec{X} - \vec{X}^0\right|^3\right).$$

Для екстремальності точки $\vec{X}^0$ необхідно, щоб в околі точки $\vec{X}^0$

$f\left(\vec{X}\right) \le f\left(\vec{X}^0\right)$ ( $\vec{X}^0$ – точка максимуму),

$f\left(\vec{X}\right) \ge f\left(\vec{X}^0\right)$ ( $\vec{X}^0$ – точка мінімуму).

Це в свою чергу залежить від знака члена

$$K = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f\left(\vec{X}^0\right)}{\partial x_i \partial x_j}\left(x_i - x_i^0\right)\left(x_j - x_j^0\right),$$

який являє собою квадратичну форму. Для його визначення введемо матрицю, складену з частинних похідних другого порядку, яка називається матрицею Гессе:

$$H\left(\vec{X}\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця Гессе додатно визначена в точці $\vec{X}^0$, то $K>0$; якщо від'ємно визначена – $K<0$.

***Достатня умова локального екстремуму*** формулюється наступним чином.

*Для того щоб критична точка $\vec{X}^0$ була екстремальною, достатньо, щоб матриця Гессе $H\left(\vec{X}\right)$ в точці $\vec{X}^0$ була*:

*а) додатно визначена (тоді $\vec{X}^0$ – точка мінімуму);*

*б) від'ємно визначена (тоді точка $\vec{X}^0$ – точка максимуму).*

Найпростішими критеріями додатної (від'ємної) визначеності матриці є критерії Сильвестра.

Для матриці Гессе $H\left(\vec{X}\right)$ випишемо головні мінори:

$$M_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2},$$

$$M_2=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .,

$$M_n = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

*Критерій Сильвестра додатної визначеності матриці Гессе* $H(\vec{X})$ *через головні мінори записується у вигляді:*

$M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $M_3 > 0$, ..., $M_n > 0$*;*

*від'ємної визначеності:*

$M_1 < 0$, $M_2 > 0$, $M_3 < 0$, ..., $(-1)^n M_n > 0$.

Матриця $H(\vec{X})$ називається *напіввизначеною* (додатно або від'ємно), якщо в попередніх нерівностях для головних її мінорів знаки замінити на $\geq$ або $\leq$, тобто, матриця Гессе *додатно напіввизначена*, якщо значення всіх головних мінорів будуть невід'ємними і *від'ємно напіввизначена*, якщо значення головних мінорів дорівнюють нулю або мають знак $(-1)^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. У всіх інших випадках матриця Гессе буде невизначеною.

В загальному випадку, коли матриця $H(\vec{X}^0)$ є невизначеною, точка $\vec{X}^0$ повинна бути сідловою. Якщо ж матриця Гессе в точці $\vec{X}^0$ виявляється напіввизначеною, то ця точка може як бути, так і не бути екстремальною. При цьому формулювання достатньої умови існування екстремуму ускладнюється, тому що для цього необхідно враховувати члени більш високих порядків в розкладі Тейлора.

**Приклад 8.6.** Дослідимо на екстремум функцію

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1 + 2x_3 + x_2 x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 .$$

Необхідна умова екстремуму тут набуває наступного вигляду:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 = 0 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3 - 2x_2 = 0 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + x_2 - 2x_3 = 0 .$$

*Розв'язання.* Розв'язком цієї системи рівнянь є точка $\vec{X}^{0} = (1/2; 2/3; 4/3)$.

Для перевірки виконання умови достатності обчислимо матрицю Гессе в точці $\vec{X}^0$ (слід відмітити, що в даному прикладі вигляд матриці Гессе не залежить від координат критичної точки):

$$H\left(\vec{X}^0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Головні мінори матриці $H\left(\vec{X}^0\right)$ дорівнюють $M_1 = -2 < 0$, $M_2 = 4 > 0$, $M_3 = -6 < 0$. У цьому випадку матриця $H\left(\vec{X}^0\right)$ є від'ємно визначеною, звідки випливає, що точка $\vec{X}^0 = (1/2; 2/3; 4/3)$ є точкою максимуму.

---

Точка $\vec{X}^0$ називається *точкою глобального максимуму* (*глобального мінімуму*) функції $f\left(\vec{X}\right)$, якщо для всіх точок $\vec{X}$ з області визначення функції справедлива нерівність

$$f\left(\vec{X}^0\right) \ge f\left(\vec{X}\right) \qquad \left( f\left(\vec{X}^0\right) \le f\left(\vec{X}\right)\right).$$

Саме часткове значення $f\left(\vec{X}^0\right)$ називається *глобальним максимумом* (*глобальним мінімумом*) функції $f\left(\vec{X}\right)$.

*Якщо область визначення функції замкнена і обмежена, то диференційована функція* $f\left(\vec{X}\right)$ *досягає у цій області своїх глобального* *максимуму (найбільшого значення) і глобального мінімуму (найменшого значення) або в критичній точці, або в граничній точці області визначення.*

На рис. 8.6 показані точки максимуму і мінімуму функції однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$. Точки $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ і $x_6$ складають множину екстремальних точок функції $f(x)$. Тут точки $x_1$, $x_3$ і $x_6$ є точками максимуму, а точки $x_2$ і $x_4$ – точками мінімуму. Оскільки

$$f(x_6)=\max\{f(x_1), f(x_3), f(x_6)\},$$

значення $f(x_6)$ є глобальним максимумом, а значення $f(x_1)$ і $f(x_3)$ – локальними максимумами. Таким же чином, значення $f(x_4)$ є локальним, а $f(x_2)$ – глобальним мінімумом функції $f(x)$.

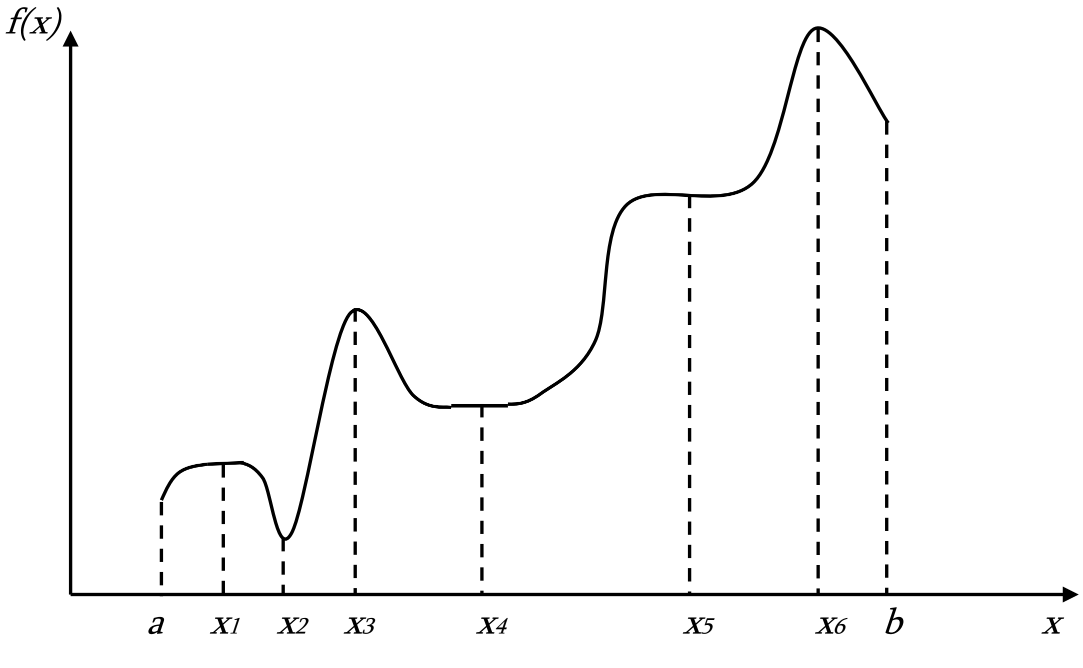



Рис. 8.6

Відмітимо, що хоч точка $x_1$ є точкою максимуму функції, вона відрізняється від інших локальних максимумів тим, що принаймні в одній точці її околу значення функції $f(x)$ співпадає з $f(x_1)$. Точка $x_1$ за цією причиною називається нестрогим максимумом функції $f(x)$, на відміну, наприклад, від точки $x_3$, яка є строгим максимумом. Нестрогий максимум, отже, передбачає наявність (нескінченної кількості) різних точок, яким відповідає одне і теж максимальне значення функції. Аналогічні результати мають місце в точці $x_4$, де функція $f(x)$ має нестрогий мінімум.

В точці $x_5$ перша похідна функції дорівнює нулю, але вона не є точкою екстремуму, а є точкою перегину. Взагалі, якщо критична точка функції не є її екстремальною точкою, то вона автоматично повинна бути точкою перегину або сідловою точкою.

Відмітимо, що для екстремумів, які розглянуті вище, більш точними є терміни: *безумовний локальний максимум* (*мінімум*), *безумовний глобальний максимум* (*мінімум*). В теорії локального безумовного екстремуму на незалежні змінні $x_j$, $j=1,2,\ldots,n$ не накладаються ніякі додаткові обмеження, тобто не вимагається, щоб змінні $x_j$ задовольняли деяким додатковим обмеженням.

Розглянемо тепер таку задачу.

Нехай треба знайти екстремум функції $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при умові, що змінні $x_j$, $j=1,2,\ldots,n$ задовольняють рівнянням

$$\varphi_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\; i=1,2,\ldots,m,\; m<n. \qquad (8.5)$$

Усі функції $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\varphi_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ повинні бути диференційованими. Рівняння (8.5) називають *рівняннями зв'язку*. Важливою умовою є відсутність обмежень на знак змінних.

Кажуть, що в точці $\vec{X}^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$, яка задовольняє рівнянням зв'язку (8.5), функція $z=f(\vec{X})$ має *умовний локальний максимум* (*мінімум*), якщо нерівність $f(\vec{X}^0)\geq f(\vec{X})$ ($f(\vec{X}^0)\leq f(\vec{X})$) має місце для всіх точок $\vec{X}$, координати яких задовольняють рівнянням зв'язку.

Легко помітити, що задача визначення умовного екстремуму співпадає із задачею нелінійного програмування (8.1), (8.4), так як функції (8.5) можуть містити вільні члени, перенесені з правих частин.

Співвідношення (8.5) означають, що серед загального числа $n$ змінних $m$ є неявними функціями $k = n - m$ інших. Якби вдалося розв'язати систему рівнянь (8.5) відносно залежних змінних, наприклад змінних:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), \\ x_{k+2} &= \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \psi_m(x_1, x_2, \ldots, x_k), \end{aligned} \tag{8.6}$$

то, замінюючи у цільової функції (8.4) $z = f(x_1, x_2, \ldots x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ ці змінні правими частинами виразів (8.6), дістали б функцію від $k$ незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_k$

$$z = F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f[x_1, \ldots, x_k, \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, \psi_m(x_1, x_2, \ldots, x_k)] \tag{8.7}$$

і задача звелась би до задачі на знаходження точок безумовного локального (глобального) екстремуму функції (8.7) при відсутності обмежень. Питання про існування функцій (8.6) розв'язується теоремою про неявні функції.

Проте такий шлях, як правило, буває нездійсненним через складність знаходження аналітичного розв'язку системи (8.5).

***Метод множників Лагранжа.***

Ідея методу множників Лагранжа також полягає в заміні задачі (8.1) або (8.5) і (8.4) простішою задачею знаходження відповідного екстремального значення хоч і складнішої функції, проте без обмежень. Остання називається *функцією Лагранжа* і має таку структуру:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

де $\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ – поки що неозначені числа, які і називаються множниками Лагранжа.

Відмітимо, що множникам Лагранжа можна надати економічного тлумачення. Якщо $f(\vec{X})$ – прибуток, а функція $\varphi_i(\vec{X})$ – витрати $i$-го ресурсу, що відповідають плану $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $\lambda_i$ – ціна (оцінка) *i*-го ресурсу, яка характеризує зміну екстремального значення цільової функції в залежності від зміни об'єму *i*-го ресурсу (маргінальна оцінка).

$L(\vec{X}, \vec{\lambda})$ – функція $n+m$ змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Визначення критичних точок цієї функції приводить до розв'язування системи рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (8.8)$$

Отже, задача знаходження умовного екстремуму функції $z = f(\vec{X})$ зводиться до знаходження локального екстремуму функції $L(\vec{X}, \vec{\lambda})$.

---

**Приклад 8.7.** Розглянемо задачу

$$\text{мінімізувати } z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

при обмежені

$$4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0.$$

*Розв'язання*. Функція Лагранжа має вигляд

$$L(\vec{X}, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14).$$

Звідки отримуємо необхідні умови екстремуму у вигляді системи рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 4\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 + 2\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0,$$

розв'язком якої є точки

$\vec{X}_1 = (2;2;1)$, $\lambda_1 = -1$,

$\vec{X}_2 = (2;-2;1)$, $\lambda_2 = -1$,

$\vec{X}_3 = (2{,}8;0;1{,}4)$, $\lambda_3 = -1{,}4$.

Використовуючи достатні умови, обчислюємо матрицю Гессе для цільової функції $z(\vec{X})$

$$H(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

яка для всіх екстремальних точок має однаковий вигляд. Головні мінори матриці Гессе дорівнюють

$M_1 = 2 > 0$, $M_2 = 4 > 0$, $M_3 = 8 > 0$.

Отже, у всіх критичних точках маємо локальні мінімуми. Глобальний мінімум знаходимо порівнюючи значення цільової функції в критичних точках

$z(\vec{X}_1) = 9$, $z(\vec{X}_2) = 9$, $z(\vec{X}_3) = 9{,}8$.

В точках $\vec{X}_1$ і $\vec{X}_2$ маємо глобальні мінімуми.

---

Метод множників Лагранжа у випадку наявності обмежень на знаки змінних і обмежень-нерівностей призводить до великих труднощів обчислювального характеру, проте вивчення цього випадку має серйозне теоретичне значення.

Розглянемо задачу (8.1), (8.4) ***при умові невід'ємності змінних***

$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8.9)$$

Глобального екстремуму функція $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ може досягти або у внутрішній точці невід'ємного октанта (гіпероктанта[1]), або ж у граничній точці цього октанта. Тому, крім критичних внутрішніх точок не-

[1] Октант – восьма частина тривимірного простору, яка обмежується координатними площинами. Гіпероктант – умовна назва частин $n$-вимірного точкового простору, обмежених координатними площинами, кількість яких $2^n$.

від'ємного октанта, які задовольняють систему обмежень (8.1), слід дослідити на екстремум і всі межі зазначеного октанта різних розмірностей, точніше, ті точки цих меж, що задовольняють обмеження (8.1).

Можна рекомендувати такий метод відшукання глобального екстремуму в розглядуваному випадку.

*1-й крок*. Знайти всі критичні точки функції $z = f\left(x_1, x, \ldots, x_n\right)$ у розглянутому $n$-вимірному просторі і, відібравши ті, координати яких задовольняють умови невід'ємності, обчислити для них значення цільової функції. Для знаходження критичних точок можна скористатися методом множників Лагранжа, не звертаючи уваги на обмеження по знаку змінних.

*2-й крок*. Поклавши у функціях $f\left(\vec{X}\right)$ і $g_i\left(\vec{X}\right)$, що одна змінна дорівнює нулю, зробити те саме (крок 1) для першого октанта відповідної координатної площини. Крок 2 провести по черзі для всіх змінних, тобто $n$ раз.

*3-й крок*. Зробити те саме, що й у кроках 1 і 2, для кожного перетину двох координатних площин, покладаючи $x_k = 0$, $x_l = 0$ ($k \neq l$, $k, l = 0, 1, \ldots, n$). Крок 3 провести по черзі для всіх комбінацій $x_k x_l$, тобто $C_n^2$ раз.

*4-й крок*. Аналогічні дії зробити для підпросторів, що є перетинами трьох різних координатних гіперплощин $x_k = 0$, $x_l = 0$, $x_s = 0$ ($k \neq l \neq s$) і так далі доти, поки не здійснимо $(n - m + 1)$ кроку, при якому покладемо, що $(n - m)$ координат у всіх можливих комбінаціях дорівнюють нулю.

Зауважимо, що таким, які дорівнюють нулю, слід покладати лише ті змінні, на які накладена умова невід'ємності.

Глобальний екстремум потрібного виду знаходимо порівнянням знайдених так значень цільової функції.

Зрозуміло, що при вимозі невід'ємності значного числа змінних виникають труднощі обчислювального характеру, які важко ліквідувати.

Розглянемо тепер застосування методу множників Лагранжа до загальної задачі нелінійного програмування, ***система умов якої включає і обмеження нерівності***. Проте всі функції, що входять у задачу (8.1) – (8.4), повинні бути диференційованими хоча б один раз.

Цілком зрозуміло, що ввівши в ліві частини додаткові невід'ємні змінні $x_{n+i} \geq 0$ $(i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m)$, дістанемо задачу, що містить лише обмеження-рівності:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m_1,$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + x_{n+i} = b_i,\ i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2,$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - x_{n+i} = b_i,\ i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0,\ x_{n+i} \geq 0.$$

Розв'язок задачі нелінійного програмування, яка включає обмеження-нерівності можна знайти так.

*1-й крок*. Розглядаючи всі обмеження як строгі рівності, знайти точки екстремуму і обчислити в них значення цільової функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Функція Лагранжа при цьому матиме вигляд

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(\vec{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i(\vec{X})\right]. \tag{8.10}$$

Так знаходимо лише екстремальні точки тієї межі множини планів задачі, де всі додаткові змінні дорівнюють нулю.

*2-й крок*. Відкидаючи в сумі (8.10) один доданок, який відповідає одному обмеженню-нерівності, визначимо критичні точки зміненої так функції Лагранжа. Відберемо серед них ті, які задовольняють відкинуте обмеження як строгу нерівність, і обчислимо для них значення цільової функції.

Крок 2 повторюємо послідовно для всіх обмежень-нерівностей, тобто $m - m_1$ раз.

*3-й крок*. Відкидаючи послідовно по два члени суми (8.10), які відповідають обмеженням-нерівностям у всіх можливих комбінаціях по дві, визначаємо щоразу критичні точки нової функції Лагранжа. Відбираємо серед них ті, які задовольняють відкинуті два обмеження як строгі нерівності і обчислюємо в них значення цільової функції.

Аналогічні кроки продовжуємо доти, поки не здійснимо $(n-m_1+1)$-й крок. Глобальний екстремум потрібного типу знаходимо, порівнюючи всі обчислені значення цільової функції.

Розглянутий метод множників Лагранжа дає, взагалі кажучи, можливість знаходити лише локальні сідлові точки функції Лагранжа, а отже, точки локальних екстремумів для відповідних задач нелінійного програмування.

Результати, добуті Куном і Таккером, що розглядаються в наступному параграфі, дають можливість установити типи задач, для яких в області їх означеності існує лише один глобальний екстремум зумовленого типу.

## 8.4. Опукле програмування.

Задачами опуклого програмування називають нелінійні задачі, в яких усі функції опуклі, усі обмеження – однотипні нерівності типу „$\le$” („$\ge$”) або рівняння.

Нагадаємо, що множина точок називається *опуклою*, якщо вона разом з будь-якими двома точками містить і весь відрізок, який з'єднує ці точки. Якщо $M$ – опуклий простір, то $\sum_{i=1}^{r} t_i \vec{X}_i \in M$ для будь-яких точок $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_r \in M$ і будь-яких дійсних чисел $t_i \ge 0$, що задовольняють умові $\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$.

*Функція* $f(\vec{X}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *визначена на опуклій множині M n-вимірного простору, називається опуклою (або опуклою вниз) на цій множині, якщо*

$$f\left(\alpha\vec{X}_1 + (1-\alpha)\vec{X}_2\right) \le \alpha f\left(\vec{X}_1\right) + (1-\alpha) f\left(\vec{X}_2\right) \tag{8.11}$$

*для будь-яких точок* $\vec{X}_1, \vec{X}_2 \in M$ *і будь-якого числа* $\alpha \in [0;1]$.

Якщо в умові (8.11) замінити знак нерівності „≤” на „≥”, то отримуємо визначення *угнутої* (або *опуклої вгору*). Якщо ж нерівності являються строгими, то функція називається строго опуклою (строго угнутою).

На рис. 8.7 зображений графік функції однієї змінної, опуклої на всій числовій прямій.

Для будь-якої пари $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$ значень аргументу довільну точку $\vec{X} \in \left[\vec{X}_1; \vec{X}_2\right]$ можна задати у вигляді $\vec{X} = \alpha\vec{X}_1 + (1-\alpha)\vec{X}_2$. Як видно з рис. 8.7, нерівність (8.11) означає, що відрізок, який з'єднує точки значення функції $\left(\vec{X}_1; f\left(\vec{X}_1\right)\right)$ і $\left(\vec{X}_2; f\left(\vec{X}_2\right)\right)$ розташований не нижче графіка опуклої функції на цій ділянці (для строго опуклої функції цей відрізок лежить вище графіка функції).

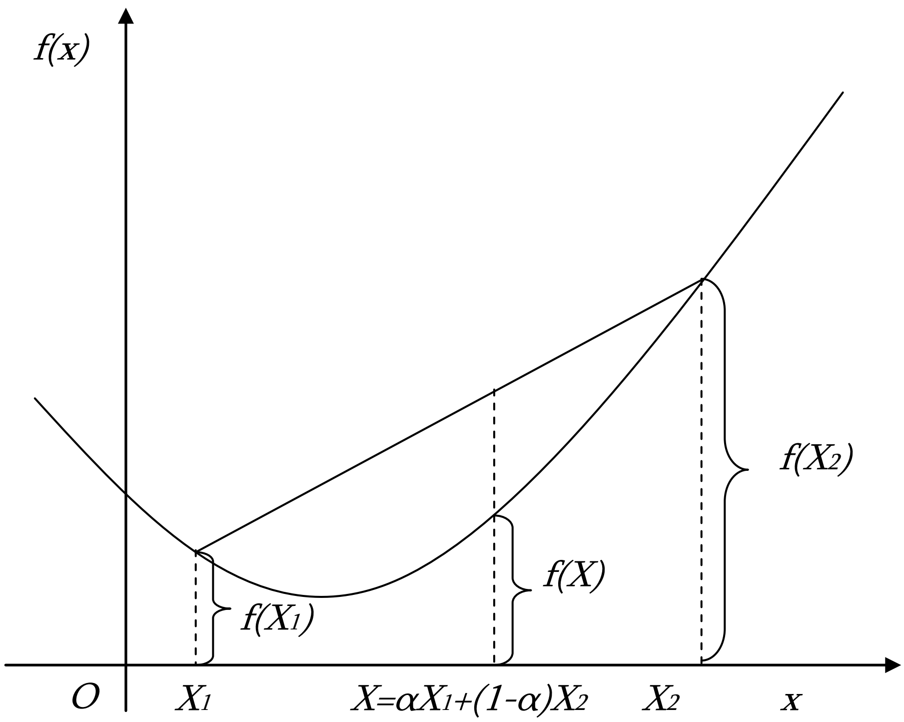



Рис. 8.7

Розглянемо властивості опуклих функцій. Всі функції, що розглядаються, визначені на деякій опуклій множині M. Властивості приводяться без доказу, але багато з них перевіряється за визначенням (8.11).

*Алгебраїчні та аналітичні властивості опуклих функції:*

1. Якщо функція $f(\vec{X})$ опукла, то функція $-f(\vec{X})$ угнута.
2. Функцію $f(\vec{X})=C$ і лінійну функцію $f(\vec{X})=a\vec{X}+b$ можна вважати і опуклою і угнутою одночасно.
3. Якщо функції $f_i(\vec{X}),\ i=1,2,\ldots,m$ опуклі, то при будь-яких дійсних числах $\alpha_i \ge 0$ функція $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\vec{X})$ також є опуклою.
4. Опукла (угнута) функція, визначена на опуклій множині *M*, неперервна в кожній внутрішній точці цієї множини.
5. Якщо $f(\vec{X})$ опукла функція, то множина точок, яка задовольняє нерівності $f(\vec{X})\le b$, опукла (якщо вона не пуста).
6. Всякий локальний мінімум опуклої функції є її глобальним мінімумом.
7. Якщо функції $f(\vec{X})$ та $g_i(\vec{X})$ ($i=1,2,\ldots,m$) опуклі, то задача мінімізації функції $f(\vec{X})$ при умовах $g_i(\vec{X})\le b_i$ ($i=1,2,\ldots,m$) має єдиний мінімум.
8. Якщо квадратична форма

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\vec{X})}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j \tag{8.12}$$

додатно означена або невід'ємна, то функція $f(\vec{X})$ опукла. Якщо квадратична форма (8.12) від'ємно означена або недодатна, то функція $f(\vec{X})$ угнута.

Щоб використовувати цю умову для визначення опуклості конкретної функції, часто корисно використати критерій Сильвестра, який розглянуто в попередньому параграфі.

У попередньому параграфі було показано, що точка оптимуму $\vec{X}^0$ задачі нелінійного програмування дає *n* компонент сідлової точки функції Лагранжа цієї задачі.

Точка $\left(\vec{X}^0, \vec{\lambda}^0\right)$, що належить множині *M*, називається *сідловою*, якщо значення функції Лагранжа $L\left(\vec{X}, \vec{\lambda}\right)$ в деякому $\varepsilon$-околу цієї точки для всіх інших точок $\left(\vec{X}, \vec{\lambda}^0\right)$ і $\left(\vec{X}^0, \vec{\lambda}\right)$, які також належать множині *M*, задовольняє співвідношення

$$L\left(\vec{X}, \vec{\lambda}^0\right) \le L\left(\vec{X}^0, \vec{\lambda}^0\right) \le L\left(\vec{X}^0, \vec{\lambda}\right). \qquad (8.13)$$

Звертаємо увагу читача, що запис $L\left(\vec{X}^0, \vec{\lambda}^0\right)$ визначає число, яке дорівнює значенню функції Лагранжа в точці $\left(\vec{X}^0, \vec{\lambda}^0\right)$, а функція $L\left(\vec{X}, \vec{\lambda}^0\right)$ в лівій частині нерівності залежить тільки від $\vec{X}$ і функція $L\left(\vec{X}^0, \vec{\lambda}\right)$ в правій частині нерівності – від $\vec{\lambda}$. У неперервних функціях

$$L_{\max}\left(\vec{X}, \vec{\lambda}^0\right) = L_{\min}\left(\vec{X}^0, \vec{\lambda}\right) = L\left(\vec{X}^0, \vec{\lambda}^0\right),$$

тобто оптимальні значення функцій збігаються.

Достатні умови існування сідлової точки можна сформулювати таким чином:

Для того щоб точка $\left(\vec{X}^0, \vec{\lambda}^0\right)$ була сідловою точкою функції $L\left(\vec{X}, \vec{\lambda}\right)$ достатньо, щоб в околі цієї точки функція була угнутою по $\vec{X}$ та опуклою по $\vec{\lambda}$.

Розглянемо необхідні умови Куна-Таккера, які дозволяють визначити критичні точки в задачі нелінійного програмування з обмеженнями-нерівностями. Ці умови є також і достатніми, якщо виконуються правила сформульовані у теоремі. Теорема Куна-Таккера тісно пов'язана з необхідними і достатніми умовами для сідлової точки і, по суті, випливає з них.

Розглянемо задачу нелінійного програмування:

$$z = f\left(\vec{X}\right) \to \max,$$

$$g_i\left(\vec{X}\right)\le b_i,\ i=1,2,\dots,k,$$
$$g_i\left(\vec{X}\right)=b_i,\ i=k+1,k+2,\dots,m, \qquad (8.14)$$
$$x_j\ge 0,\ j=1,2,\dots,n.$$

***Задачами опуклого програмування*** називають нелінійні задачі типу (8.14), в яких усі функції (ліві частини) системи обмежень опуклі, усі обмеження – однотипні нерівності типу „$\le$” (при обмеженнях типу „$\ge$” ліві частини обмежень повинні бути угнутими функціями), або рівняння; цільова функція в задачах максимізації угнута, а в задачах мінімізації – опукла. При цьому множина планів задачі є опуклою областю, а задача задовольняє умови теореми Куна-Таккера, тобто має глобальний єдиний екстремум.

**Теорема Куна-Таккера.** *Для того щоб деякий план $\vec{X}^0$ був розв’язком (точкою глобального максимуму) задачі (8.14), необхідно і достатньо, щоб існував відповідний цьому плану вектор $\vec{\lambda}^0$ множників Лагранжа такий, що точка $\left(\vec{X}^0,\vec{\lambda}^0\right)$ буде сідловою точкою функції Лагранжа задачі*

$$L\left(\vec{X},\vec{\lambda}\right)=f\left(\vec{X}\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(b_i-g_i\left(\vec{X}\right)\right) \qquad (8.15)$$

*і скрізь на множині планів цієї задачі цільова функція $f\left(\vec{X}\right)$ буде угнута, а функції $g_i\left(\vec{X}\right)$ – опуклі, причому множники Лагранжа, які відповідають обмеженням-нерівностям, повинні бути невід’ємними.*

Тепер для задачі максимізації можна сформулювати ***умови Куна-Таккера***, необхідні для того, щоб вектори $\vec{X}$ і $\vec{\lambda}$ визначали критичну точку:

$$\vec{\lambda}\ge\vec{0},$$
$$\frac{\partial f\left(\vec{X}^0\right)}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i\left(\vec{X}^0\right)}{\partial x_j}=0,\ j=1,2,\dots,n,$$
$$\lambda_i\left(b_i-g_i\left(\vec{X}^0\right)\right)=0,\ i=1,2,\dots,m,$$

$$g_i\left(\vec{X}^0\right)\le b_i,\ i=1,2,\dots,m.$$

Якщо цільова функція і область допустимих розв'язків задачі володіють певними властивостями, які пов'язані з опуклістю і угнутістю, то необхідні умови Куна-Таккера являються також достатніми. Згадані властивості перераховані в таблиці 8.1.

Таблиця 8.1

| Тип оптимізації | Необхідні умови | |
|---|---|---|
| | Цільова функція | Область допустимих розв'язків |
| Максимізація | Опукла | Опукла множина |
| Мінімізація | Угнута | Опукла множина |

Процедура перевірки опуклості або угнутості деякої функції є більш простою процедурою, ніж доведення опуклості множини допустимих розв'язків задачі. Так як опуклість допустимої множини може бути встановлена шляхом безпосередньої перевірки опуклості або угнутості функцій обмежень, то завдяки цьому в таблиці 8.2 приведений перелік вимог, які простіше використовувати на практиці.

Таблиця 8.2

| Тип оптимізації | Тип обмеження | Необхідні властивості | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $f\left(\vec{X}\right)$ | $g_i\left(\vec{X}\right)$ | $\lambda_i$ |
| Максимізація | $\le$ | Опукла | Опукла | $\ge 0$ |
| | $\ge$ | | Угнута | $\le 0$ |
| | $=$ | | Лінійна | Без обмежень |
| Мінімізація | $\le$ | Угнута | Опукла | $\le 0$ |
| | $\ge$ | | Угнута | $\ge 0$ |
| | $=$ | | Лінійна | Без обмежень |

**Приклад 8.8.** Розглянемо задачу

$$\text{Мінімізувати } f\left(\vec{X}\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

при обмеженнях

$$g_1\left(\vec{X}\right)=2x_1+x_2\le 5,$$

$$g_2(\vec{X}) = x_1 + x_3 \le 2,$$

$$g_3(\vec{X}) = x_1 \ge 1,$$

$$g_4(\vec{X}) = x_2 \ge 2,$$

$$g_5(\vec{X}) = x_3 \ge 0.$$

*Розв'язання.* Оскільки розглядається задача мінімізації, то $\vec{\lambda} \le \vec{0}$. Тому умови Куна-Таккера записуються у вигляді:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \le 0,$$

$$2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_4 = 0,$$

$$2x_3 - \lambda_2 + \lambda_5 = 0,$$

$$\lambda_1(2x_1 + x_2 - 5) = 0,$$

$$\lambda_2(x_1 + x_3 - 2) = 0,$$

$$\lambda_3(1 - x_1) = 0,$$

$$\lambda_4(2 - x_2) = 0,$$

$$\lambda_5 x_3 = 0,$$

$$2x_1 + x_2 \le 5,$$

$$x_1 + x_3 \le 2,$$

$$x_1 \ge 1,\ x_2 \ge 2,\ x_3 \ge 0.$$

Звідси отримується розв'язок:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0,\ \lambda_3 = -2,\ \lambda_4 = -4.$$

Оскільки і цільова функція $f(\vec{X})$, і область допустимих розв'язків є опуклими, то отримана критична точка визначає глобальний мінімум задачі.

Розглянутий приклад показує, що розв'язування системи, яка народжується умовами Куна-Таккера, в явному вигляді може бути складним.

У загальному випадку опуклих задач доводиться звертатися до універсальних методів їх розв’язування. Одним з методів такого типу є градієнтний метод і його різноманітні модифікації. Зауважимо, що градієнтні методи можуть бути застосовані до всіх тих задач нелінійного програмування, цільова функція і обмеження яких диференційовані хоча б один раз, але при цьому є можливість знаходити лише локальні екстремуми цільової функції. Для опуклих задач, в яких виконуються умови теореми Куна-Таккера, градієнтні методи дають змогу знаходити точки глобального екстремуму. Градієнтні методи є наближеними ітераційними методами і тому дають лише певне наближення дійсної екстремальної точки, якого при збільшенні обсягу обчислень можна досягнути з наперед заданою точністю.

В основі градієнтних методів лежить основна властивість градієнта диференційованої функції – визначати напрям найшвидшого зростання цієї функції.

Введемо необхідні поняття.

*Похідною* $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ *функції* $f(\vec{X}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *за напрямом* $\vec{l}$ *в точці* $\vec{X}$ *називається границя*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f(\vec{X} + \lambda \vec{l}) - f(\vec{X})}{\lambda}.$$

Напрямок $\vec{l}$ задається вектором $\vec{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$.

Якщо функція $f(\vec{X})$ диференційована в точці $\vec{X}$, то вона має в цій точці похідну за будь-яким напрямом $\vec{l}$, яка виражається через частинні похідні за формулою

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{1}{|\vec{l}|} \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

де $|\vec{l}|$ – довжина вектора $\vec{l}$, тобто $|\vec{l}| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2}$.

Абсолютна величина похідної за напрямом дає швидкість зміни функції в цьому напрямку, а знак вказує на характер зміни (зростання або спадання).

*Градієнтом* $\nabla f$ ($grad f$) *функції* $f(\vec{X}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні, тобто*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Можна показати, що максимум похідної за напрямом $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ досягається тоді, коли напрямок $\vec{l}$ співпадає з напрямом $\nabla f$. Похідна функції $f$ за напрямом градієнта $\nabla f$ дорівнює

$$\frac{\partial f}{\partial(\nabla f)} = \frac{1}{|\nabla f|}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{\partial f}{\partial x_i} = |\nabla f|.$$

Таким чином, в кожній точці $\vec{X}$ напрям градієнта є напрямом найбільшого зростання функції, а довжина градієнта дорівнює найбільшій швидкості зростання функції в цій точці.

Ідея градієнтних методів полягає в переході від точки до точки на гіперповерхні цільової функції в напрямі градієнта з деяким, наперед заданим, кроком. Згідно з градієнтним методом, обчислення завершуються при знаходженні точки, в якій градієнт дорівнює нулю. Але це лише необхідна умова для того, щоб в даній точці знаходився оптимум. Щоб впевнитись, що знайдена саме точка оптимуму, звичайно залучаються властивості опуклості та угнутості цільової функції.

Одним з градієнтних методів є *метод найшвидшого спуску* (в іноземній літературі цей метод називається *методом найшвидшого підйому*).

Загальна схема розв'язування задач математичного програмування методами спуску полягає в побудові послідовності

$$\vec{X}_0, \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_k, \ldots \qquad (8.16)$$

розв'язків системи обмежень даної задачі за наступним принципом: в якості $\vec{X}_0$ обирається будь-яка точка області допустимих розв'язків і потім кожна наступна точка отримується з попередньої за формулою:

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k + \lambda \vec{l}\,, \qquad (8.17)$$

де $\vec{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ – деякий напрямок, а $\lambda$ – число. При цьому напрямок $\vec{l}$ і „довжина кроку” $\lambda$ обираються так, щоб забезпечити збіжність послідовності (8.16) до оптимального розв'язку $\vec{X}^*$. В загальному випадку процес отримання послідовних наближень $\vec{X}_k$ нескінченний (і тоді деяке $\vec{X}_r$ приймається за наближене значення оптимального розв'язку $\vec{X}^*$), однак іноді процес може завершитись і за скінчене число кроків, які приводять до локального, а в задачах опуклого програмування і глобального оптимуму.

Знаходячи похідну за напрямом $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}$, можна визначати, чи є напрямок $\vec{l}$ „вигідним” або „невигідним” в змісті наближення до оптимуму.

Так як напрямок градієнта $\nabla z$ цільової функції є напрямом її найшвидшого росту, то при відшуканні максимуму угнутої функції (мінімуму опуклої функції) в якості $\vec{l}$ часто береться $\nabla z$ $(-\nabla z)$ і тоді формула (8.17) приймає вид

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k + \lambda \cdot \nabla z\left(\vec{X}_k\right),\ \lambda > 0 \text{ (якщо шукається } \max z\text{)} \qquad (8.18)$$

або

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k - \lambda \cdot \nabla z\left(\vec{X}_k\right),\ \lambda > 0 \text{ (якщо шукається } \min z\text{).} \qquad (8.19)$$

Методи спуску, в яких ітераційна послідовність (8.16) знаходиться за формулою (8.18) або (8.19), називаються *градієнтними*. Між собою вони відрізняються способами вибору довжини кроку $\lambda$ і алгоритмами знаходження точки $\vec{X}_{k+1}$, якщо $\vec{X}_k$ знаходиться на границі області розв'язків і формула (8.18) виводить $\vec{X}_{k+1}$ за межі цієї області. (Вибір довжини кроку $\lambda$ дуже важливий, так як пересуваючись від точки $\vec{X}_k$ в напрямі $\nabla z$ можна „проскочити" мимо точки, в якій досягається шуканий максимум). Якщо величина $\lambda$ вибирається так, щоб приріст функції $\Delta z$ при переміщенні з точки $\vec{X}_k$ в точку $\vec{X}_{k+1}$ був найбільшим (при відшуканні $\max z$) або найменшим (при відшуканні $\min z$), то градієнтний метод називається *методом найшвидшого спуску*. Отже, за методом найшвидшого спуску довжина кроку $\lambda$ в формулі (8.18) або (8.19) обирається так, щоб при цьому значенні $\lambda$ досягався екстремум функції $\Delta z = z\left(\vec{X}_{k+1}\right) - z\left(\vec{X}_k\right)$. Слід звернути увагу на той факт, що при знаходженні точки $\vec{X}_{k+1}$ попередня точка $\vec{X}_k$ вважається вже відомою, тобто $z\left(\vec{X}_k\right)$ і $\nabla z\left(\vec{X}_k\right)$ є сталими величинами, а $\Delta z$ – функцією однієї змінної $\lambda$. Якщо продиференціювати функцію $\Delta z$ та врахувати вираз (8.18) і вираз градієнта в точці $\vec{X}_k$, то отримуємо, що необхідна умова екстремуму $\frac{d(\Delta z)}{d\lambda} = 0$ прийме вигляд:

$$\frac{\partial z\left(\vec{X}_{k+1}\right)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial z\left(\vec{X}_k\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial z\left(\vec{X}_{k+1}\right)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial z\left(\vec{X}_k\right)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial z\left(\vec{X}_{k+1}\right)}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial z\left(\vec{X}_k\right)}{\partial x_n} = 0 \qquad (8.20)$$

Цьому виразу можна надати більш компактну форму, якщо скористатись скалярним добутком векторів:

$$\nabla z\left(\vec{X}_{k+1}\right) \cdot \nabla z\left(\vec{X}_k\right) = 0. \qquad (8.21)$$

Якщо оптимум досягається всередині області розв'язків системи обмежень даної задачі опуклого програмування, то немає небезпеки, що точка $\vec{X}_{k+1}$, знайдена за формулою (8.18) або (8.19), вийде за межі цієї області та довжину кроку $\lambda$ визначають за формулою (8.20) без яких-небудь додаткових обмежень. Розглянемо приклад розв'язування такої задачі. Замість $\nabla z\left(\vec{X}_k\right)$ будемо писати $\nabla z_k$.

**Зауваження 1.** Для різних $k$ довжина кроку $\lambda$ в формулі (8.18), взагалі кажучи, різна, і для строгості треба писати $\lambda_k$, але це зробило б запис розв'язування більш громіздким.

**Зауваження 2.** Для спрощення розрахунків в формулах (8.18) і (8.21) замість $\nabla z_k$ можна брати будь-який вектор з тим самим напрямом, тобто координати вектора $\nabla z_k$ можна множити або ділити на додатне число.

---

**Приклад 8.9.** Знайти методом найшвидшого спуску з точністю до 0,001 мінімум функції

$$z = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + 1$$

при обмеженнях

$$x_1^2 + x_2^2 \le 4,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

*Розв'язання*. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 4x_1 - x_2 - 1,\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = -x_1 + 2x_2 - 1$$

та загальний вираз градієнту цільової функції:

$$\nabla z = (4x_1 - x_2 - 1; -x_1 + 2x_2 - 1).$$

В якості вихідної точки беремо точку $\vec{X}_0 = (1;1)$, яка лежить в області розв'язків. Так як $z$ є опуклою функцією, то для знаходження точок $\vec{X}_{k+1}$ будемо користуватись формулою (8.19), в якій замість $\nabla z_k$ в деяких випадках будемо брати вектор $l_k$ з тим самим напрямком, але більш простими координатами. Довжина кроку $\lambda$ знаходиться за формулою (8.21).

*1-й крок*. Підставимо у вираз градієнта цільової функції координати точки $\vec{X}_0$ та отримуємо $\nabla z_0 = (2;0)$.

За формулою (8.19) $\vec{X}_1 = \vec{X}_0 - \lambda\nabla z_0 = (1;1) - \lambda(2;0) = (1-2\lambda;1)$.

Підставивши координати точки у вираз градієнта, отримуємо

$$\nabla z_1=(4(1-2\lambda)-1-1;-1+2\lambda+2\cdot1-1)=(2-8\lambda;2\lambda).$$

Тепер можна записати рівняння (8.21) для знаходження $\lambda$:

$$\nabla z_0\cdot\nabla z_1=(2;0)\cdot(2-8\lambda;2\lambda)=4-16\lambda+0\cdot2\lambda=4-16\lambda=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{4}.$$

Підставивши це значення $\lambda$ у вирази для $\vec{X}_1$ і $\nabla z_1$, отримуємо

$$\vec{X}_1=\left(1-2\cdot\frac{1}{4};1\right)=\left(\frac{1}{2};1\right),\ \nabla z_1=\left(0;\frac{1}{2}\right).$$

На кожному подальшому кроці виконуються аналогічні обчислення, які описані у 1-му кроці.

*2-й крок*. Замість $\nabla z_1$ візьмемо $\vec{l}_1=(0;1)$.Тоді

$$\vec{X}_2=\vec{X}_1-\lambda\vec{l}_1=\left(\frac{1}{2};1\right)-\lambda(0;1)=\left(\frac{1}{2};1-\lambda\right).$$

$$\nabla z_2=\left(4\cdot\frac{1}{2}-(1-\lambda)-1;-\frac{1}{2}+2(1-\lambda)-1\right)=\left(\lambda;\frac{1}{2}-2\lambda\right).$$

$$\vec{l}_1\cdot\nabla z_2=(0;1)\cdot\left(\lambda;\frac{1}{2}-2\lambda\right)=0\cdot\lambda+1\cdot\left(\frac{1}{2}-2\lambda\right)=\frac{1}{2}-2\lambda=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{4}.$$

$$\vec{X}_2=\left(\frac{1}{2};1-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right),$$

$$\nabla z_2=\left(4\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-1;-\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{4}-1\right)=\left(\frac{1}{4};0\right).$$

*3-й крок*. Замість $\nabla z_2$ візьмемо $\vec{l}_2=(1;0)$. Тоді

$$\vec{X}_3=\vec{X}_2-\lambda\vec{l}_2=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)-\lambda(1;0)=\left(\frac{1}{2}-\lambda;\frac{3}{4}\right).$$

$$\nabla z_3=\left(4\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)-\frac{3}{4}-1;-\frac{1}{2}+\lambda+2\cdot\frac{3}{4}-1\right)=\left(\frac{1}{4}-4\lambda;\lambda\right).$$

$$\vec{l}_2\cdot\nabla z_3=1\cdot\left(\frac{1}{4}-4\lambda\right)+0\cdot\lambda=\frac{1}{4}-4\lambda=0,\text{ звідки }\lambda=\frac{1}{16}.$$

$$\vec{X}_3=\left(\frac{1}{2}-\lambda;\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{7}{16};\frac{3}{4}\right)=(0{,}4375;0{,}75)\ \text{ і }\ \nabla z_3=\left(\frac{1}{4}-4\lambda;\lambda\right)=\left(0;\frac{1}{16}\right).$$

*4-й крок*. Беремо $\vec{l}_3=(0;1)$. Тоді

$$\vec{X}_4 = \vec{X}_3 - \lambda\vec{l}_3 = \left(\frac{7}{16};\frac{3}{4}\right) - \lambda(0;1) = \left(\frac{7}{16};\frac{3}{4} - \lambda\right).$$

$$\nabla z_4 = \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{4} + \lambda - 1; -\frac{7}{16} + \frac{3}{2} - 2\lambda - 1\right).$$

$$\vec{l}_3 \cdot \nabla z_4 = 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \left(\frac{1}{16} - 2\lambda\right) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{32}.$$

$$\vec{X}_4 = \left(\frac{7}{16};\frac{3}{4} - \lambda\right) = \left(\frac{7}{16};\frac{23}{32}\right) = (0{,}4375; 0{,}71875).$$

$$\nabla z_4 = \left(\frac{1}{32};0\right).$$

*5-й крок*. Беремо $\vec{l}_4 = (1;0)$. Тоді

$$\vec{X}_5 = \vec{X}_4 - \lambda\vec{l}_4 = \left(\frac{7}{16};\frac{23}{32}\right) - \lambda(1;0) = \left(\frac{7}{16} - \lambda;\frac{23}{32}\right).$$

$l_4 \cdot \nabla z_5 = 1 \cdot \left(\frac{1}{32} - 4\lambda\right) + 0 \cdot \lambda = \frac{1}{32} - 4\lambda = 0$, звідки

$\lambda = \frac{1}{128}$ і $\vec{X}_5 = \left(\frac{55}{128};\frac{23}{32}\right)$.

Отже, $\vec{X}_5 = (0{,}4296875; 0{,}71875)$. Порівняння $\vec{X}_4$ і $\vec{X}_5$ показує, що координати цих точок відрізняються менше, ніж на 0,01 і тому (це не зовсім строго) можна покласти $\vec{X}^* \approx (0{,}43; 072)$. Неважко переконатись, що всі точки $\vec{X}_0, \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_5, \vec{X}^*$ лежать в області розв'язків системи обмежень.

## 8.5. Квадратичне програмування

До задач квадратичного програмування відносяться ті нелінійні задачі, які мають лінійні обмеження і цільову функцію, що становить суму лінійної і квадратичної форм. Отже, квадратичні задачі є окремим випадком опуклих задач. Спеціальні методи розв'язування квадратичних задач повністю ґрунтуються на їх специфіці.

У матричній формі загальну задачу квадратичного програмування можна записати у вигляді:

максимізувати (або мінімізувати) $z = \vec{C}\vec{X} + \vec{X}^T D\vec{X}$

при обмеженнях

$$A\vec{X} \le \vec{b}\,,$$

$$\vec{X} \ge \vec{0}\,,$$

де

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \vec{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n),\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

(Нагадаємо, що символом „*T*” позначають транспоновані вектори і матриці).

$D$ – симетрична квадратична матриця, а функція $\vec{X}^T D\vec{X}$ є квадратичною формою. Матриця $D$ буде від’ємно означеною в задачі максимізації і додатньо означеною – в задачі мінімізації. Це означає, що цільова функція $z$ є строго опуклою у випадку задачі мінімізації і строго угнутою – в задачі максимізації. Оскільки обмеження лінійні і, отже, можуть вважатися опуклими функціями, умови теореми Куна-Таккера повністю виконуються і задача має глобальний екстремум. Ця обставина дає можливість використати необхідні умови Куна-Таккера для побудови ефективного методу розв’язку квадратичних задач, в основі якого лежить обчислювальний алгоритм симплексного методу.

Задачу квадратичного програмування розглянемо для випадку, коли цільова функція підлягає максимізації. Зміна формулювання задачі при мінімізації являється тривіальною. Використовуючи блочні матриці, загальну постановку задачі можна записати в більш компактному вигляді, а саме:

$$z = \vec{C}\vec{X} + \vec{X}^T D\vec{X} \to \max\,,$$

$$G(\vec{X}) = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}\vec{X} - \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \le \vec{0}\,,$$

де $I$ – одинична матриця.

Позначимо через

$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \text{ і } \vec{U} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

множники Лагранжа, які відповідають обмеженням $A\vec{X} - \vec{b} \le \vec{0}$ і $-\vec{X} \le \vec{0}$ відповідно. Застосовуючи умови Куна-Таккера, отримуємо

$$\vec{\lambda} \ge \vec{0},\ \vec{U} \ge \vec{0},$$

$$\nabla z - \left(\vec{\lambda}^T, \vec{U}^T\right) \cdot \nabla G\left(\vec{X}\right) = \vec{0},$$

$$\lambda_i \left( b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\mu_j x_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$A\vec{X} \le \vec{b},$$

$$-\vec{X} \le \vec{0}.$$

Звідки маємо

$$\nabla z = \vec{C} + 2\vec{X}^T D,$$

$$\nabla G\left(\vec{X}\right) = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $\vec{S} = \vec{b} - A\vec{X} \ge \vec{0}$ вектор додаткових змінних. Тоді наведені вище умови набувають наступного вигляду.

$$-2\vec{X}^T D + \vec{\lambda}^T A - \vec{U}^T = \vec{C},$$

$$A\vec{X} + \vec{S} = \vec{b},$$

$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i \text{ для всіх } i \text{ та } j,$$

$$\vec{\lambda}, \vec{U}, \vec{X}, \vec{S} \ge \vec{0}.$$

Отже, необхідні умови можуть бути записані у вигляді

$$\begin{pmatrix} -2D & A^T & -I & \vec{0} \\ A & \vec{0} & \vec{0} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{\lambda} \\ \vec{U} \\ \vec{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{C}^T \\ \vec{b} \end{pmatrix}, \tag{8.22}$$

$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i \text{ для всіх } i \text{ та } j, \tag{8.23}$$

$$\vec{\lambda}, \vec{U}, \vec{X}, \vec{S} \geq \vec{0}.$$

Всі рівняння, за виключенням $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i$, є лінійними відносно змінних $\vec{X}$, $\vec{\lambda}$, $\vec{U}$ і $\vec{S}$. Отже, вихідна задача зводиться до знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь, що задовольняють додатковим умовам $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i$. Виконання цієї умови означає, що якщо змінна $\lambda_i$ в базисному розв'язку приймає *додатне значення*, то змінна $s_i$ не може бути базисною і приймати додатного значення. Аналогічно змінні $\mu_j$ і $x_j$ не можуть одночасно приймати додатних значень. Оскільки функція $z$ строго угнута, а область допустимих розв'язків являє собою опуклу множину, допустимий розв'язок, який задовольняє всі ці умови, повинен бути єдиним і оптимальним.

Розв'язок системи, що розглядається, знаходиться шляхом реалізації першого етапу так званого *двохетапного методу* розв'язування задач лінійного програмування. В двохетапному методі процес розв'язування задачі розбивається на два етапи. На першому етапі ведеться пошук початкового допустимого базисного розв'язку. Якщо такий розв'язок знайдено, то на другому розв'язується вихідна задача. Як було сказано, для нас цікавим є тільки перший етап, тому розглянемо його алгоритм.

Задача лінійного програмування записується у першій стандартній формі, а в обмеження додаються штучні змінні для отримання канонічної форми задачі і початкового базисного розв'язку. Розв'язується задача *мінімізації* суми штучних змінних з вихідними обмеженнями. Якщо мінімальне значення цієї нової цільової функції більше нуля, то це означає, що вихідна задача не має допустимих розв'язків, і процес обчислень завершується. Якщо нова цільова функція дорівнює нулю, тобто обертаються в нуль всі штучні змінні, то це означає, що вихідна задача має непусту множину допустимих розв'язків.

Розглянемо наступну задачу.

**Приклад 8.10.** Максимізувати

$$z = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 \le 2,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

*Розв'язання.* Цю задачу можна записати в матричній формі

$$z = (4,6)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$(1,2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le 2,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Отже, $\vec{C} = (4,6)$, $D = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $A = (1 \quad 2)$, $\vec{b} = (2)$ і $\vec{C}^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

та умови Куна-Таккера (8.22) приймають вигляд.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Початкова симплексна таблиця будується шляхом введення штучних змінних $R_1$ і $R_2$ у перше і друге рівняння (у третьому рівнянні є базисна змінна $s_1$). Нову цільову функцію $r = R_1 + R_2$ виразимо через небазисні змінні $r = -6x_1 - 6x_2 - 3\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2 + 10$.

Маємо початкову симплексну таблицю

| Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $\lambda_1$ | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $s_1$ | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 10 | 6 | 6 | 3 | –1 | –1 | 0 | 0 | 0 |
| $R_1$ | 4 | $\boxed{4}$ | 2 | 1 | –1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $R_2$ | 6 | 2 | 4 | 2 | 0 | –1 | 0 | 0 | 1 |
| $s_1$ | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

*Перша ітерація*

Оскільки $\mu_1 = 0$ ($\mu_1$ не є базисною), то в базис можна ввести змінну $x_1$, так як вона згідно з додатковим обмеженням (8.23) може бути додатною. При цьому з числа базисних змінних виключаємо змінну $R_1$. Отримуємо симплексну таблицю.

| Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $\lambda_1$ | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $s_1$ | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 4 | 0 | 3 | 3/2 | 1/2 | –1 | 0 | –3/2 | 0 |
| $x_1$ | 1 | 1 | 1/2 | 1/4 | –1/4 | 0 | 0 | 1/4 | 0 |
| $R_2$ | 4 | 0 | 3 | 3/2 | 1/2 | –1 | 0 | –1/2 | 1 |
| $s_1$ | 1 | 0 | $\boxed{3/2}$ | –1/4 | 1/4 | 0 | 1 | –1/4 | 0 |

*Друга ітерація*

Так як $\mu_2 = 0$, змінною, що вводиться в базис буде $x_2$. В результаті переходимо до наступної таблиці.

| Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $\lambda_1$ | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $s_1$ | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | –1 | –2 | –1 | 0 |
| $x_1$ | 2/3 | 1 | 0 | 1/3 | –1/3 | 0 | –1/3 | 1/3 | 0 |
| $R_2$ | 2 | 0 | 0 | $\boxed{2}$ | 0 | –1 | –2 | 0 | 1 |
| $x_2$ | 2/3 | 0 | 1 | –1/6 | 1/6 | 0 | 2/3 | –1/6 | 0 |

*Третя ітерація*

Так як $s_1 = 0$, в число базисних можна ввести змінну $\lambda_1$. В результаті отримуємо симплексну таблицю.

| Базис | ОП | $x_1$ | $x_2$ | $\lambda_1$ | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $s_1$ | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | –1 | –1 |
| $x_1$ | 1/3 | 1 | 0 | 0 | –1/3 | 1/6 | 0 | 1/3 | –1/6 |
| $\lambda_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | –1/2 | –1 | 0 | 1/2 |
| $x_2$ | 5/6 | 0 | 1 | 0 | 1/6 | –1/12 | 1/2 | –1/6 | 1/12 |

Остання таблиця дає оптимальний розв'язок. Так як $r = 0$, отриманий розв'язок $x_1 = 1/3$, $x_2 = 5/6$ є допустимим. Оптимальне значення $z$ обчислюється підстановкою отриманого розв'язку у вираз для цільової функції вихідної задачі і дорівнює $z = 4{,}16$.

## 8.6. Нелінійні задачі з сепарабельними функціями

*Сепарабельною*[1] *називають таку функцію $n$ змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що є сумою $n$ функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної, тобто*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j). \qquad (8.24)$$

Звернемо увагу, що всі лінійні функції

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \quad (a_i \text{ – константи})$$

є сепарабельними і тому розглядувані тут задачі мають структуру, подібну до задач лінійного програмування. Тому природно використати цю подібність для побудови методів розв'язування нелінійних задач із сепарабельними функціями. В цьому параграфі розглядається метод наближеного розв'язування задач сепарабельного програмування, заснований на лінійній апроксимації і на симплексному методі лінійного програмування.

Деякі несепарабельні відносно даних змінних функції являються сепарабельними відносно інших змінних. Знайшовши відповідну заміну

[1] Слід відмітити, що поняття сепарабельності тут не має нічого спільного (крім назви) з „класичним" його визначенням з функціонального аналізу.

змінних, можна застосувати методи сепарабельного програмування. Наприклад, функція $z = x_1 x_2$ буде сепарабельною відносно змінних $y_1$ і $y_2$, де $x_1 = y_1 + y_2$, а $x_2 = y_1 - y_2$, звідки $z = y_1^2 - y_2^2$. Якщо ввести позначення $z' = \ln z = y_1 + y_2$, де $y_1 = \ln x_1$ і $y_2 = \ln x_2$, то нова функція $z'$ буде сепарабельною.

У сепарабельному програмуванні розглядаються задачі нелінійного програмування, в яких як цільова функція, так і функції системи обмежень являються сепарабельними, а саме:

$$z = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right) \to \max, \tag{8.25}$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\left(x_j\right) \le b_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, m_1, \tag{8.26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\left(x_j\right) = b_i\,,\ i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m\,. \tag{8.27}$$

Кожну функцію однієї змінної $f_j\left(x_j\right)$ можна апроксимувати кусково-лінійною функцією $\tilde{f}_j\left(x_j\right)$, значення якої збігаються в точках зламу (вузлових) із значеннями заданої нелінійної функції (рис 8.8).

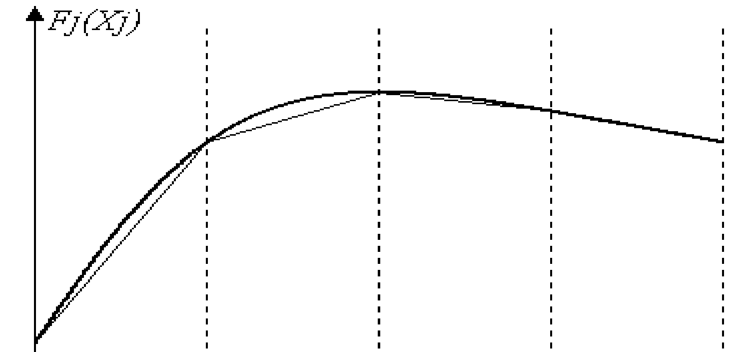



Рис. 8.8

Вузлові точки, як правило, вибирають на однаковій, наперед вибраній, відстані одна від іншої і вони повинні належати області значення функції. Очевидно, апроксимована функція повинна бути неперервною.

Апроксимуючи таким способом усі функції заданої нелінійної задачі, дістаємо вже лінійну задачу, наближену до вихідної. Зрозуміло, що і розв’язок наближеної задачі не буде точним розв’язком вихідної задачі, а дає лише певне його наближення. За рахунок зменшення довжини ланок апроксимуючих ламаних ліній це наближення, як правило, можна визначити з наперед заданою точністю, що потребує часто значного збільшення обсягу обчислень. (Проте, можливі випадки, коли встановити збіжність розв’язків наближених задач до локальних екстремумів вихідної задачі при цьому дуже важко).

З геометричних міркувань зрозуміло, що для знаходження глобального екстремуму функції мети на множині планів задачі треба, щоб функції цієї задачі мали потрібні властивості опуклості. Якщо ця умова не виконана, то метод кусково-лінійної апроксимації приводить лише до наближеного визначення точок локального екстремуму. Більш того, побудова наближених задач інколи приводить до появи їх власних „фіктивних” для вихідної задачі екстремумів. Усе це потребує великої обережності при застосуванні методу кусково-лінійної апроксимації.

Нехай $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – деяка сепарабельна функція, яка входить у задачу (8.25) – (8.27). Знайдемо аналітичний запис апроксимуючої її кусково-лінійної функції. Позначимо $[\alpha_j; \beta_j]$ – інтервал допустимих значень змінної $x_j$. Розіб’ємо його за допомогою фіксованих точок $x_{kj}$ ($k = 1, 2, \ldots, r$) на $r$ частин-сегментів (взагалі число сегментів для різних змінних $x_j$ може бути різною і точніше було позначати її $r_j$). Якщо $x_j$ міститься між $x_{kj}$ і $x_{k+1,j}$, то рівняння відповідної хорди, яка апроксимує цю функцію, буде таким:

$$\frac{\tilde{\varphi}_j(x_j) - \varphi_{kj}}{\varphi_{k+1,j} - \varphi_{kj}} = \frac{x_j - x_{kj}}{x_{k+1,j} - x_{kj}} \qquad (8.28)$$

(рівняння прямої, що проходить через дві задані точки), де $\varphi_{kj} = \varphi_j(x_{kj})$; $\varphi_{k+1,j} = \varphi_j(x_{k+1,j})$. Якщо кожне з відношень в рівності (8.28) позначити через $\lambda_j$, то отримуємо:

$$x_j = \lambda_j x_{k+1,j} + (1-\lambda_j) x_{kj}, \tag{8.29}$$

$$\tilde{\varphi}_j(x_j) = \lambda_j \varphi_{k+1,j} + (1-\lambda_j)\varphi_{kj}, \tag{8.29a}$$

причому $0 \le \lambda_j \le 1$. Рівняння (8.29), (8.29a) є параметричними рівняннями хорди (8.28). Позначивши тепер для *k*-го сегмента

$$\lambda_j = \lambda_{k+1,j};\ 1-\lambda_j = \lambda_{kj}$$

дістанемо з (8.29), (8.29a)

$$\tilde{\varphi}(x_j) = \lambda_{kj}\varphi_{kj} + \lambda_{k+1,j}\varphi_{k+1,j} \tag{8.30}$$

для

$$x_j = \lambda_{kj} x_{kj} + \lambda_{k+1,j} x_{k+1,j} \tag{8.31}$$

де

$$\lambda_{kj} + \lambda_{k+1,j} = 1;\ \lambda_{kj}, \lambda_{k+1,j} \ge 0 \tag{8.32}$$

Формули (8.30) – (8.32) можна узагальнити для зображення довільного $x_j \in [\alpha_j; \beta_j]$ і відповідних довільних значень апроксимуючої функції $\tilde{\varphi}_j(x_j)$, якщо прийняти таку додаткову умову, яку іноді називають *правилом обмеженого введення у базис*:

*у базисі повинно бути не більше двох, і при тому сусідніх,* $\lambda_{kj}$ *для кожного* $j = 1, 2, \ldots, n$ *відмінних від нуля (тобто додатних).*

Тоді узагальнені формули матимуть такий вигляд:

$$x_j = \sum_{k=0}^{r} \lambda_{kj} x_{kj}, \tag{8.33}$$

$$\tilde{\varphi}_j(x_j) = \sum_{k=0}^{r} \lambda_{kj}\varphi_{kj}, \tag{8.34}$$

$$\sum_{k=0}^{r} \lambda_{kj} = 1,\ \lambda_{kj} \ge 0. \tag{8.35}$$

Користуючись виразами (8.33) – (8.35) і правилом обмеженого введення у базис, можемо для задачі (8.25) – (8.27) записати наближену задачу так:

$$z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{r} f_{kj}\lambda_{kj} \to \max, \tag{8.36}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{r} g_{kij}\lambda_{kj} \le b_i \,,\; i = 1, 2, \ldots, m_1, \tag{8.37}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{r} g_{kij}\lambda_{kj} = b_i \,,\; i = m_1+1, m_1+2, \ldots, m, \tag{8.38}$$

$$\sum_{k=0}^{r} \lambda_{kj} = 1, \tag{8.39}$$

$$\lambda_{kj} \ge 0 \text{ для всіх } k \text{ і } j. \tag{8.40}$$

Змінними наближеної задачі (8.36) – (8.40) є величини $\lambda_{kj}$, оскільки значення функцій $f_{kj}$ і $g_{kij}$ фіксовані (обчислені у вузлових точках). Число змінних $\lambda_{kj}$ легко підрахувати, а саме

$$N = n \cdot r + 1$$

або, якщо число частин-сегментів для змінних різні

$$N = \sum_{j=1}^{n} r_j + 1.$$

Ця наближена задача називається задачею в $\lambda$-формі. Вона була б лінійною, якби не правило обмеженого введення у базис, накладене на змінні $\lambda_{kj}$. Проте, незважаючи на це, наближена задача допускає застосування такої модифікації алгоритму симплексного методу, яка враховує згадане правило.

Як видно, з останньої формули, наближена задача навіть для невеликої вихідної задачі може бути дуже великих розмірів за рахунок різкого збільшення числа змінних. Проте на практиці часто трапляється, що вихідна задача нелінійна лише відносно однієї змінної $x_j$, через що заміни через змінні $\lambda_{kj}$ потребує лише зазначена змінна, а решту можна розглядати як звичайні змінні лінійної задачі.

Знайшовши розв’язок наближеної задачі, оптимальні значення $x_j$ визначають за формулою (8.33). Для ілюстрації розв’яжемо описаним способом елементарний приклад.

---

**Приклад 8.11.** Знайти оптимальний розв’язок задачі

$$z = 2x_1 - x_1^2 + x_2 \to \max,$$

$$2x_1^2 + 3x_2^2 \le 6,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

*Розв’язання.* Зауважимо, що задачу легко розв’язати графічно. Множина допустимих розв’язків опукла, а функції $f_1(x_1) = 2x_1 - x_1^2$ та $f_2(x_2) = x_2$ – угнуті. Тому задача задовольняє умови Куна-Таккера: має єдиний глобальний максимум у точці $x_1^* = 0{,}7906$; $x_2^* = 1{,}258$, $z = 2{,}213$.

Перейдемо до побудови наближеної задачі. Зауважимо, що

$g_1(x_1) = 2x_1^2$, $g_2(x_2) = 3x_2^2$.

Визначимо границі допустимих значень змінних $x_1$ та $x_2$. З обмеження задачі випливає, що

$$0 \le x_1 \le \sqrt{3} = 1{,}732;$$

$$0 \le x_2 \le \sqrt{2} = 1{,}414.$$

Виберемо точки $x_{kj}$ $(j = 1,2)$ рівновіддаленими з кроком 0,25. Тоді $r_1 = 7$; $r_2 = 6$, причому маємо $x_{71} = 1{,}750 > 1{,}732$, а $x_{62} = 1{,}500 > 1{,}414$, що не впливає в цьому прикладі на метод побудови наближеної задачі. Отже, замість змінної $x_1$ маємо 8 нових змінних $\lambda_{kj}$ $(k = 0,1,\ldots,7)$, а замість змінної $x_2$ – 7 нових змінних $\lambda_{k2}$ $(k = 0,1,\ldots,6)$. Значення обчислених $x_{k1}$, $x_{k2}$, $f_{k1}$, $f_{k2}$, $g_{k1}$, $g_{k2}$ зведені в таблицю:

| $k$ | $x_1$ | $f_1$ | $g_1$ | $x_2$ | $f_2$ | $g_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00 | 0 | 0 | 0,00 | 0 | 0 |
| 1 | 0,25 | 0,4375 | 0,1250 | 0,25 | 0,2500 | 0,1875 |
| 2 | 0,50 | 0,7500 | 0,5000 | 0,50 | 0,5000 | 0,7500 |
| 3 | 0,75 | 0,9375 | 1,1250 | 0,75 | 0,7500 | 1,6875 |
| 4 | 1,00 | 1,0000 | 2,0000 | 1,00 | 1,0000 | 3,0000 |
| 5 | 1,25 | 0,9375 | 3,1250 | 1,25 | 1,2500 | 4,6875 |
| 6 | 1,50 | 0,7500 | 4,5000 | 1,50 | 1,5000 | 6,7500 |
| 7 | 1,75 | 0,4375 | 6,1250 | – | – | – |

Не розписуючи наближену задачу докладно, подамо її у вигляді

$$\tilde{z} = \sum_{k=0}^{7} f_{k1}\lambda_{k1} + \sum_{k=0}^{6} f_{k2}\lambda_{k2} \to \max,$$

$$\sum_{k=0}^{7} g_{k1}\lambda_{k1} + \sum_{k=0}^{6} g_{k2}\lambda_{k2} + x_3 = 6,$$

$$\sum_{k=0}^{7} \lambda_{k1} = 1, \ \sum_{k=0}^{6} \lambda_{k2} = 1,$$

$$\lambda_{kj} \geq 0, \ j = 1,2 \text{ і для всіх } k, \ x_3 \geq 0.$$

Зрозуміло, що сюди ще слід додати *правило обмеженого введення у базис*.

Враховуючи велику кількість змінних не будемо приводити алгоритм симплекс-методу, а наведемо оптимальний план наближеної задачі. Отже, $\tilde{z}^* = 2{,}2102$ при $\lambda_{31}^* = 1$, $\lambda_{52}^* = 0{,}9091$ $\lambda_{62}^* = 0{,}0909$. Решта $\lambda_{kj}^* = 0$, $j = 1,2$. Можна пересвідчитись, що цей план є оптимальним, якщо скористатись, наприклад, інструментарієм універсального інтегрованого середовища Mathcad (приклади розв'язування оптимізаційних задач у середовищі Mathcad приведені в розділі 12).

Звернемо увагу, що оптимальне $\tilde{z}^*$ наближеної задачі всього на 0,0028 відрізняється від точного оптимального $z^*$.

Визначимо оптимальні значення $\tilde{x}_1^*$ і $\tilde{x}_2^*$, які знаходимо з наближеної задачі:

$$\tilde{x}_1^* = \lambda_{31}^* x_{31} = 1 \cdot 0{,}75 = 0{,}75;$$

$$\tilde{x}_2^* = \lambda_{52}^* x_{52} + \lambda_{62}^* x_{62} = 0{,}9091 \cdot 1{,}25 + 0{,}0909 \cdot 1{,}50 = 1{,}2727.$$

Зазначимо, що $\tilde{x}_1^*$ і $\tilde{x}_2^*$ значно більше відрізняються від відповідних значень точного оптимального плану $x_1^*$ і $x_2^*$, ніж значення цільових функцій при цих планах.

---

Для збільшення точності розв'язку задачі слід встановити деякий окіл точки знайденого з наближеної задачі оптимального плану і знову розробити інтервали зміни окремих координат в цьому околі на певне число проміжків. Потім скласти нову наближену задачу та розв'язати її.

Для прикладу 8.11 таким околом є квадрат $0{,}5 \le x_1 \le 1{,}0$; $1{,}0 \le x_2 \le 1{,}5$. Величину кроку можна зменшити до 0,1. Ітерації можна повторювати до одержання необхідної точності розв'язку.

## 8.7. Задачі дробово-лінійного програмування

До задач дробово-лінійного програмування належать задачі з дробово-лінійною цільовою функцією та лінійними обмеженнями. Дробово-лінійне програмування відноситься до нелінійного програмування, так як має цільову функцію, яка задана у нелінійному вигляді.

Задача дробово-лінійного програмування в загальному вигляді записується наступним чином:

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j} = \frac{P(\vec{X})}{Q(\vec{X})} \to opt, \tag{8.41}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m_1, \tag{8.42}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,\ i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m, \tag{8.43}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.44}$$

Практичне значення дробово-лінійних задач зумовлюється тим, що значна кількість важливих економічних показників є відносними, тобто вони визначаються як частка від ділення двох інших показників. Наприклад, математична модель задачі дробово-лінійного програмування може бути використана для визначення собівартості продукції, рівня рентабельності господарської діяльності.

Позначимо: $p_j$ – прибуток підприємства від реалізації одиниці продукції $j$-го виду;

$x_j$ – кількість випущеної продукції $j$-го виду;

$s_j$ – ціна одиниці продукції $j$-го виду;

$c_j$ – собівартість виробництва одиниці продукції $j$-го виду;

$d_j$ – витрати на виробництво одиниці продукції $j$-го виду.

Задача рентабельності ($P_v$) витрат на виробництво продукції має вид

$$P_v = {\sum p_j x_j} \Big/ {\sum c_j x_j} \to \max .$$

Задача рентабельності ($P_p$) продаж має вид

$$P_p = {\sum p_j x_j} \Big/ {\sum s_j x_j} \to \max .$$

Задача визначення витрат ($V_g$) у розрахунку на гривню товарної продукції записується у вигляді

$$V_g = {\sum c_j x_j} \Big/ {\sum s_j x_j} \to \min .$$

Задача знаходження середньої собівартості одиниці продукції записується як

$$C_o = {\sum d_j} \Big/ {\sum x_j} \to \min .$$

Вказані математичні моделі мають системи обмежень в залежності від умов задачі.

Хоч вигляд цільової функції дає підстави віднести дробово-лінійні задачі до нелінійних, їх математична структура дозволяє розв'язувати ці задачі одним з варіантів симплексного методу.

Якщо дробово-лінійна цільова функція неоднорідна, тобто має вид

$$z = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots p_n x_n + p_0}{q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots q_n x_n + q_0},$$

то заміною змінних $x_1 = x_1' - x_1^{(0)}$ і $x_2 = x_2' - x_2^{(0)}$ її слід привести до однорідного виду. Очевидно, що $x_1^{(0)}$ та $x_2^{(0)}$ повинні задовольняти систему рівнянь, з якої вони і визначаються:

$$p_1 x_1^{(0)} + p_1 x_2^{(0)} = p_0,$$

$$q_1 x_1^{(0)} + q_2 x_2^{(0)} = q_0.$$

Покладемо, що на множині планів задачі знаменник цільової функції не стає рівним нулю: $Q(\vec{X}) \neq 0$, якщо $\vec{X} \in \Omega$. На практиці ця умова завжди реалізується. Внаслідок цього на множині планів задачі функція $Q(\vec{X})$ приймає або лише додатні, або лише від'ємні значення, оскільки вона лінійна, а отже неперервна. Відносячи знак мінус, в разі потреби, до знаменника, вважаємо цю функцію завжди додатною: $Q(\vec{X}) > 0$ при $\vec{X} \in \Omega$.

Для подальшого розгляду приведемо без доведення три важливих твердження.

***Дробово-лінійна функція монотонно змінюється вздовж довільного прямолінійного відрізка*** $[\vec{X}^{(1)}, \vec{X}^{(2)}]$.

***Цільова функція задачі дробово-лінійного програмування досягає свого оптимуму в крайній точці множини планів задачі, тобто хоча б один з опорних планів буде розв'язком задачі.***

***Якщо оптимум дробово-лінійної цільової функції досягається в кількох крайніх точках многогранника планів за-***

***дачі, то кожна точка грані, що є лінійною комбінацією цих вершин, являється розв'язком задачі.***

Розглянемо геометрію задачі дробово-лінійного програмування. Відмінність від задачі лінійного програмування полягатиме лише в інтерпретації гіперповерхонь рівня цільової функції при зміні її значень. Рівнянням гіперповерхні рівня $z = const$, очевидно, буде рівняння гіперплощини, яка проходить через початок координат

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n - z\left(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_n x_n\right) = 0 .$$

Змінюючи $z$ від $-\infty$ до $+\infty$, одержимо пучок гіперплощин. У випадку $n = 2$ центром симетрії пучка прямих буде початок координат, при $n = 3$ – віссю симетрії пучка – пряма, що проходить через початок координат, при $n > 3$ гіперплощини пучка симетричні відносно деякого точкового підпростору (гіперсиметрії) розмірності $n - 2$. При зростанні (зменшенні) параметра $z$ гіперплощина рівня обертається відносно гіперосі симетрії в одну сторону. Положення гіперплощини рівня, при яких вона дотикається до множини планів (у вершині чи по грані), відповідає екстремальним значенням цільової функції на множині планів задачі.

Виходячи з описаної геометрії задач дробово-лінійного програмування, найпростіші з них ($n = 2$, $n = 3$) можна розв'язувати графічним способом. Розглянемо задачу дробово-лінійного програмування з двома змінними в загальному вигляді

$$z = \left(p_1 x_1 + p_2 x_2\right) / \left(q_1 x_1 + q_2 x_2\right) \to \max/\min$$

при обмеженнях:

$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$,

$x_1, x_2 \ge 0$.

Для розв'язування цієї задачі знайдемо область допустимих розв'язків, яка визначається системою обмежень. Нехай ця область не є пустою множиною (рис. 8.9).

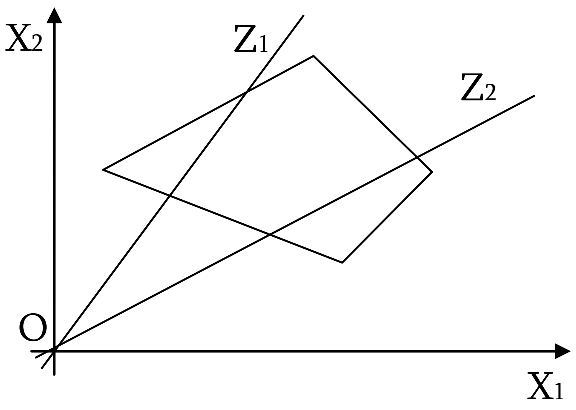



Рис. 8.9

З виразу для цільової функції знайдемо $x_2$:

$$x_2 = kx_1,$$

де $k = (p_1 - zq_1)/(zq_2 - p_2)$.

Встановимо, як буде вести себе кутовий коефіцієнт $k$ при монотонному зростанні $z$. Знайдемо похідну від $k$ по $z$:

$$\frac{dk}{dz} = \frac{q_1 p_2 - q_2 p_1}{(zq_2 - p_2)^2}.$$

Знаменник похідної завжди додатний, а чисельник від $z$ не залежить. Отже, похідна має сталий знак і при збільшені $z$ кутовий коефіцієнт буде тільки зростати або спадати, а пряма буде обертатись в один бік. Якщо кутовий коефіцієнт прямої має додатне значення, то пряма обертається проти годинникової стрілки, при від'ємному значенні $k$ – за стрілкою годинника. Після встановлення напрямку обертання, знаходимо вершину або вершини многокутника, в яких цільова функція приймає максимальне (мінімальне) значення, або встановлюємо необмеженість задачі.

При цьому можливі наступні випадки.

1. Область допустимих розв'язків обмежена, максимум і мінімум цільової функції досягаються в її кутових точках (рис. 8.10).

2. Область допустимих розв'язків необмежена, але існують кутові точки, в яких цільова функція приймає максимальне і мінімальне значення (рис. 8.11).
3. Область допустимих розв'язків необмежена, маємо один з екстремумів. Наприклад, мінімум досягається в одній з вершин області і є, так званий, асимптотичний максимум (рис. 8.12).
4. Область допустимих розв'язків необмежена. Максимум і мінімум є асимптотичними (рис. 8.13).

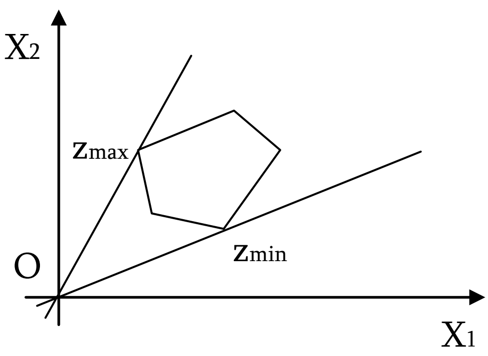



Рис. 8.10

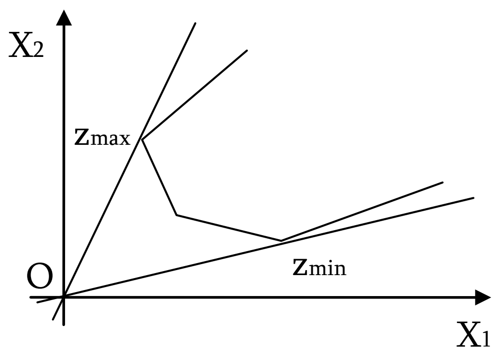



Рис. 8.11

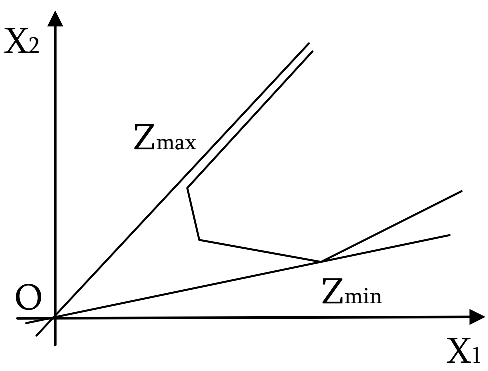



Рис. 8.12

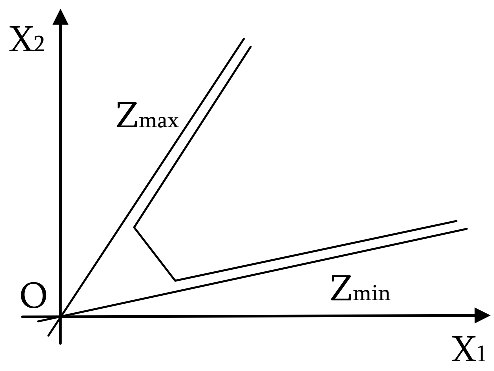



Рис. 8.13

Розглянемо використання графічного методу розв'язування задач дробово-лінійного програмування для знаходження собівартості продукції.

**Приклад 8.12.** Для виробництва двох видів продукції *A* і *B* підприємство використовує три типи технологічного обладнання. Кожен з виробів повинен пройти обробку на кожному з типів обладнання. Час обробки кожного з виробів, витрати, пов'язані з виробництвом одного виробу, подані у таблиці:

| Тип обладнання | Витрати часу на обробку одного виробу, год | |
|---|---|---|
| | *A* | *B* |
| I | 2 | 8 |
| II | 1 | 1 |
| III | 12 | 3 |
| Витрати на виробництво одного виробу, у.г.о. | 2 | 3 |

Обладнання I і III типів підприємство може використати не більше 26 год і 39 год відповідно, обладнання II типу доцільно використовувати не менше 4 год.

Визначити, скільки виробів кожного виду слід виготовити підприємству, щоб середня собівартість одного виробу була мінімальною.

*Розв'язання*. Складемо математичну модель задачі. Нехай $x_1$ – кількість виробу А, яку слід виготовити підприємству, $x_2$ – кількість виробу В. Загальні витрати на їх виробництво становлять $(2x_1 + 3x_2)$ у.г.о., а середня собівартість одного виробу буде рівною

$$(2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2).$$

Математична модель задачі матиме вигляд

$$z = (2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2) \to \min,$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 26,$$

$$x_1 + x_2 \ge 4,$$

$$12x_1 + 3x_2 \le 39,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Трикутник *ABC* – область допустимих розв'язків задачі (рис. 8.14).

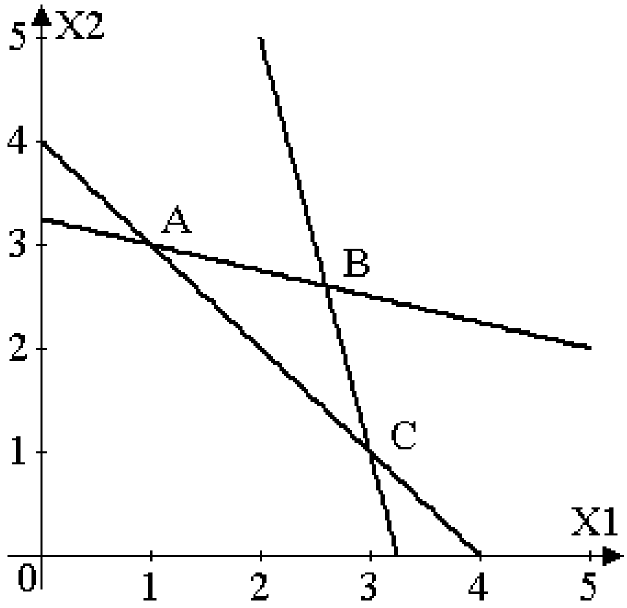



Рис. 8.14

Знайдемо $x_2$:

$$x_2 = \frac{z-2}{3-z} x_1 = k x_1 .$$

Кутовий коефіцієнт прямої рівний $k = (z-2)/(3-z)$, тоді

$$\frac{dk}{dz} = \frac{1}{(3-z)^2} .$$

Так як $dk/dz > 0$, то функція $k = (z-2)/(3-z)$ зростає. Це відповідає обертанню прямої проти годинникової стрілки. Отже, в точці $C$ (рис. 8.14) цільова функція буде мати найменше значення (глобальний мінімум).

Знайдемо координати точки $C$. Розв'язуючи систему

$12x_1 + 3x_2 = 39$,

$x_1 + x_2 = 4$,

отримуємо: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, тобто $C(3;1)$.

$$\vec{X}_{opt} = (3;1), \; z = 9/4 .$$

Отже, підприємству слід випускати 3 вироби *A* і 1 виріб *B*. При цьому середня собівартість одного виробу буде мінімальною і рівною 2,25 у.г.о.

---

Задачу дробово-лінійного програмування можна звести до задачі лінійного програмування і розв'язати симплексним методом.

Позначимо

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j}$$

при умові

$$\sum_{j=1}^{n} q_j x_j \neq 0$$

та введемо нові змінні $y_j = y_0 x_j$.

Тоді задача прийме вид

$$z = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j \to \max/\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j y_j = 1,$$

$$y_j \geq 0,\ y_0 > 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Після знаходження оптимального розв'язку отриманої задачі, використовуючи співвідношення між $y_j$ і $x_j$, знаходять оптимальний розв'язок вихідної задачі дробово-лінійного програмування.

**Приклад 8.13.** Дана задача дробово-лінійного програмування

$$z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \max$$

при обмеженнях

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$,

$2x_1 + x_2 + x_4 = 6$,

$x_j \geq 0$, $j = 1,2,3,4$.

*Розв'язання.* Позначимо: $x_1 + 2x_2 + 1 = \frac{1}{y_0}$, $y_0 > 0$, тоді $z = 2x_1y_0 - x_2y_0$.

Позначимо: $x_1y_0 = y_1$, $x_2y_0 = y_2$, $x_3y_0 = y_3$, $x_4y_0 = y_4$.

Помножимо обидві частини всіх обмежень на $y_0$ та перейдемо до нових змінних $y_0$, $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$. Задача набуває вигляду

$$z = 2y_1 - y_2 \to \max,$$

$$-2y_0 + y_1 - 2y_2 + y_3 = 0,$$

$$-6y_0 + 2y_1 + y_2 + y_4 = 0,$$

$$y_0 + y_1 + 2y_2 = 1,$$

$$y_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,\ y_0 > 0.$$

Отримали задачу лінійного програмування, розв'язуємо її симплексним методом (таблиця 8.3).

Таблиця 8.3

| Номер ітерації | Номер рядка | Базис | ОП | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 0 | $z$ | 0 | 0 | –2 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | $y_3$ | 0 | –2 | 1 | –2 | 1 | 0 |
| | 2 | $y_4$ | 0 | –6 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| | 3 | | 1 | $\boxed{1}$ | 1 | 2 | 0 | 0 |
| II | 0 | $z$ | 0 | 0 | –2 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | $y_3$ | 2 | 0 | $\boxed{3}$ | 2 | 1 | 0 |
| | 2 | $y_4$ | 6 | 0 | 8 | 13 | 0 | 1 |
| | 3 | $y_0$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| III | 0 | $z$ | 4/3 | 0 | 0 | 7/3 | 2/3 | 0 |
| | 1 | $y_1$ | 2/3 | 0 | 1 | 2/3 | 1/3 | 0 |
| | 2 | $y_4$ | 2/3 | 0 | 0 | 2/3 | –8/3 | 1 |
| | 3 | $y_0$ | 1/3 | 1 | 0 | 4/3 | –1/3 | 0 |

Отримуємо

$$\vec{Y}^* = (1/3, 2/3, 0, 0, 2/3),$$

тоді

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = 2,\ x_2 = \frac{y_2}{y_0} = 0,\ x_3 = \frac{y_3}{y_0} = 0,\ x_4 = \frac{y_4}{y_0} = 2,\ z_{\max} = 4/3.$$

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. За яких властивостей задачі пошуку оптимальних рішень належать до класу задач нелінійного програмування? Запишіть загальну задачу нелінійного програмування.
2. Яка різниця в поняттях локального, умовного та глобального екстремуму?
3. Сформулюйте необхідну і достатню умови локального екстремуму.
4. Метод множників Лагранжа.
5. Яка функція називається опуклою (угнутою)? Алгебраїчні та аналітичні властивості опуклих функцій.
6. Яка задача оптимізації відноситься до задач опуклого програмування?
7. Сформулюйте необхідні і достатні умови існування сідлової точки для деякої диференційованої функції.
8. Зміст теореми Куна-Таккера.
9. Властивості градієнта функції та їх використання при пошуку оптимального розв'язку. Метод найшвидшого спуску.
10. Як формулюється задача квадратичного програмування? Методи її розв'язування.
11. Яка функція називається сепарабельною?
12. Метод розв'язування задач сепарабельного програмування.
13. Сформулюйте задачу дробово-лінійного програмування. Наведіть приклади задач економічного змісту, що відносяться до класу дробово-лінійних.
14. Метод розв'язування задач дробово-лінійного програмування.

## Вправи

Використовуючи графічний метод, знайти глобальні екстремуми функцій.

8.1. $z = x_1 + 2x_2$ при обмеженнях:

$$x_1^2 + x_2^2 \le 25,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

8.2. $z = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях:

$$x_1 x_2 \le 8,$$

$$x_1 \le 6,$$

$$x_2 \le 4,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

8.3. $z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2$ при обмеженнях:

$$x_1 + 2x_2 \le 8,$$

$$3x_1 + x_2 \le 15,$$

$$x_1 + x_2 \ge 1,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

8.4. $z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$ при обмеженнях:

$$3x_1 + 2x_2 \le 7,$$

$$10x_1 - x_2 \le 8,$$

$$-18x_1 + 4x_2 \le 12,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

8.5. $z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$ при обмеженнях:

$$2x_1 + 3x_2 \ge 6,$$

$$3x_1 - 2x_2 \le 18,$$

$$-x_1 + 2x_2 \le 8,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

8.6. $z=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$ при обмеженнях:

$$x_1^2+x_2^2\le 36,$$

$$x_1, x_2\ge 0.$$

8.7. $z=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$ при обмеженнях:

$$(x_1-1)(x_2+1)\le 4,$$

$$x_2\le 3,$$

$$x_1, x_2\ge 0.$$

8.8. $z=x_1^2+x_2^2$ при обмеженнях:

$$x_1x_2\le 4,$$

$$x_1+x_2\ge 5,$$

$$x_1\le 7,$$

$$x_2\le 6,$$

$$x_1, x_2\ge 0.$$

Методом множників Лагранжа розв'язати наступні задачі.

8.9. $z=x_1^2+2x_2^2+x_1-2x_2+8\to opt$ при обмеженні:

$$2x_1+x_2=3.$$

8.10. $z=x_1^2-x_2^2+2x_1+2x_2+4\to opt$ при обмеженні:

$$2x_1+2x_2=3.$$

8.11. $z=x_1x_2\to opt$ при обмеженні:

$$x_1+x_2=1.$$

8.12. $z=x_1+4x_2+3\to opt$ при обмеженні:

$$x_1x_2=3.$$

8.13. $z=5x_1+3x_2\to \max$ при обмеженнях:

$$x_1+2x_2+x_3-6=0,$$

$$3x_1+x_2+x_4-9=0,$$

$$x_j\ge 0,\quad j=1,2,3,4.$$

8.14. $z = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 \to \min$ при обмеженнях:

$$x_1 + x_2^2 + x_3 - 5 = 0,$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 - 7 = 0.$$

8.15. $z = 2x_1x_3 - x_2x_3 \to opt$ при обмеженнях:

$$x_2 + 2x_3 = 3,$$

$$x_1 + x_2 = 2.$$

8.16. $z = x_1x_2 + x_2x_3 \to opt$ при обмеженнях:

$$x_1 + x_2 = 2,$$

$$x_2 + x_3 = 2.$$

8.17. $z = x_1x_2 + x_2x_3 \to opt$ при обмеженнях:

$$x_1 - x_2 = 2,$$

$$x_2 + x_3 = 4.$$

8.18. $z = 2x_1 - x_2 + x_3 \to opt$ при обмеженні:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

8.19. Фірма реалізує автомобілі двома шляхами: через роздрібну і оптову торгівлю. При реалізації $x_1$ автомобілів у роздріб витрати на реалізацію становлять $4x_1 + x_1^2$ грн., а при продажі $x_2$ автомобілів оптом – $x_2^2$ грн. Знайти оптимальний план реалізації автомобілів, який мінімізує сумарні витрати, якщо загальна кількість автомобілів на продаж складає 200 шт.

Для кожної з задач 8.20 – 8.23 виконайте не більше п'яти ітерацій методу найшвидшого спуску. У всіх випадках покладіть $\vec{X}^0 = \vec{0}$.

8.20. $z = 3 - x^2 - x^4 \to \max$.

8.21. $z = x_1 - x_2 + x_1^2 - x_1x_2 \to \min$.

8.22. $z = \left(x_2 - x_1^2\right)^2 + \left(1 - x_1\right)^2 \to \min$.

8.23. $f\left(\vec{X}\right) = \vec{c}\vec{X} + \vec{X}^*A\vec{X} \to \max$, де $\vec{c} = (1,3,5)$,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1/2 \\ -3 & -2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

У задачах 8.24 – 8.35 покажіть, що $z$ – строго опукла, і знайдіть розв'язок методом квадратичного програмування.

8.24. $z = -3x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 \max$,

$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$,

$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$,

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

8.25. $-x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1 - x_2 \to \max$,

$x_1 + x_2 \geq 6$,

$x_1 + x_2 \leq 12$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

8.26. $-x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 - 4x_2 + 8 \to \max$,

$2x_1 + x_2 \leq 2$,

$x_1 + 2x_2 \leq 2$,

$x_1, x_2 \geq 0$.

8.27. $-x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 - 4x_2 + 3 \to \max$,

$0 \leq x_1 \leq 3$,

$0 \leq x_2 \leq 6$.

8.28. $-x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + 4 \to \max$,

$x_1 - x_2 \geq 6$,

$0 \leq x_1 \leq 10$,

$x_2 \geq 0$.

8.29. $-2x_1^2 - 3x_1x_2 - x_2 + 2x_1 + 1 \to \max$,

$-x_1 + x_2 \le 6,$

$0 \le x_1 \le 4,$

$x_2 \ge 0.$

8.30. $-4x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 + 3 \to \max,$

$x_1 + x_2 \le 6,$

$0 \le x_2 \le 6,$

$x_1 \ge 0.$

8.31. $-x_1^2 - 1/2\, x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 \to \max,$

$2x_1 + 3x_2 \le 12,$

$x_1 - x_2 \le 4,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

8.32. $-1/2\, x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_2 \to \max,$

$x_1 + x_2 \le 6,$

$0 \le x_2 \le 4,$

$x_1 \ge 0.$

8.33. $-2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 \to \max,$

$x_1 + x_2 \le 6,$

$2x_1 - x_2 \le 9,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

8.34. $z = 6x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 \to \max,$

$x_1 + x_2 \le 1,$

$2x_2 + 3x_2 \le 4,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

8.35. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_1 - 3x_2 - 5x_3 \to \min,$

$x_1 + x_2 + x_3 \ge 1,$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6,$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

8.36. Для наступної задачі побудуйте апроксимуючу модель у вигляді задачі частково-цілочислового програмування.

$$z = \exp(-x_1) + x_1 + (x_2 + 1)^2 \to \max$$

при обмеженнях

$$x_1^2 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'яжіть апроксимуючу задачу, використовуючи правило обмеженого вводу у базис. Потім знайдіть оптимальний розв'язок вихідної задачі.

8.37. Розгляньте наступну задачу.

$$z = x_1 x_2 x_3 \to \max$$

при обмеженнях

$$x_1^2 + x_2 + x_3 \leq 4,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Побудуйте апроксимуючу задачу у вигляді задачі лінійного програмування з урахуванням подальшого використання правила обмеженого вводу у базис.

8.38. Покажіть, яким чином наведена нижче задача може бути приведена до сепарабельного виду.

$$z = x_1 x_2 + x_3 + x_1 x_3 \to \max$$

при обмеженнях

$$x_1 x_2 + x_2 + x_1 x_3 \leq 10,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

8.39. Покажіть, яким чином наступну задачу можна перетворити в задачу сепарабельного програмування.

$$z = \exp\left(2x_1 + x_2^2\right) + (x_3 - 2)^2 \to \min$$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 6,$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

8.40. Покажіть, як наступну задачу можна перетворити в задачу сепарабельного програмування.

$$z = \exp(x_1 x_2) + x_2^2 x_3 + x_4 \to \max$$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 x_3 + x_3 \le 10,$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0,$$

$x_4$ без обмеження за знаком.

8.41. Розв'яжіть представлену нижче задачу як задачу опуклого сепарабельного програмування.

$$z = x_1^4 + 2x_2 + x_3^2 \to \min$$

при обмеженнях

$$x_1^2 + x_2 + x_3^2 \le 4,$$

$$|x_1 + x_2| \le 0,$$

$$x_1, x_3 \ge 0,$$

$x_2$ без обмеження за знаком.

8.42. Розв'яжіть як задачу опуклого сепарабельного програмування наступну задачу.

$$z = (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \to \min$$

при обмеженнях

$$6x_1 + 3(x_2 + 1)^2 \le 12,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

В задачах 8.43 – 8.45 знайти глобальні максимум і мінімум дробово-лінійних функцій.

8.43. $z = (2x_1 - x_2)/(x_1 + x_2)$

при обмеженнях

$$2x_1 - 3x_2 \geq -13,$$

$$x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$4x_1 - x_2 \leq 19,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

8.44. $z = (3x_1 - x_2)/(x_1 + x_2)$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 \geq 5,$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 7,$$

$$3x_1 - x_2 \leq 11,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

8.45. $z = (3x_1 + 7x_2)/(x_1 + x_2)$

при обмеженнях

$$x_1 - 2x_2 \leq 1,$$

$$x_1 + x_2 \geq 4,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

# РОЗДІЛ 1
# ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

## 1.1. Метод динамічного програмування

У попередніх розділах розглянуто методи розв'язування задач математичного програмування, реалізація яких приводила до знаходження всіх компонент оптимального плану одночасно на останньому кроці алгоритму. Знайдений оптимальний план вважався дійсним для всього розглядуваного періоду функціонування реальної системи. Отже, рішення про оптимізацію роботи системи за допомогою вибору значень її керованих параметрів приймається один раз. У цьому випадку говорять про однокроковий (одноетапний) процес прийняття рішення. Природно, таке рішення не може враховувати можливі зміни оптимального плану в часі протягом розглядуваного періоду.

Крім того, розглянуті методи часто не придатні для розв'язування багатьох важливих нелінійних задач великої розмірності. У загальному випадку можна сподіватися на відшукання деякого локального екстремуму функції мети.

Динамічне програмування – особливий метод оптимізації рішень, спеціально пристосований до так званих „багатокрокових" (або „багатоетапних") операцій.

Економічний процес є керованим, якщо можна впливати на хід його розвитку. Під управлінням розуміється сукупність рішень, які приймаються на кожному етапі з метою впливу на хід розвитку процесу. Наприклад, випуск продукції підприємства – керований процес. Сукупність рішень, які приймаються на початку року (кварталу, місяця) по забезпеченню підприємства сировиною, заміні обладнання, фінансуванню і т. д., є управлінням. Необхідно організувати випуск продукції так, щоб прийняті рішення на окремих етапах сприяли одержанню максимально можливого об'єму продукції або прибутку.

Моделі лінійного та нелінійного програмування використовуються при дослідженні широкомасштабних проблем макроекономіки. У мікроекономіці вони ефективні, якщо розглядаються короткотермінові процеси, які можна вважати стабільними на досліджуваних проміжках. Моделі динамічного програмування використовуються переважно в дослідженні задач мікроекономіки і, на відміну від моделей лінійного і нелінійного програмування, дають можливість враховувати перебіг процесу в часі, оцінюючи його стан і моделювати поетапне управління процесом.

Динамічне програмування дає досить ефективний метод послідовного прийняття рішень про оптимізацію роботи системи за допомогою розв'язування між собою однокрокових задач. Тоді говорять про багатокроковий процес прийняття рішення чи розв'язування задачі. Це дає можливість у ряді випадків оптимізувати динамічні системи, для яких час відіграє істотну роль. Проте з формально-математичної точки зору методи динамічного програмування не обов'язково пов'язані з реально-динамічними задачами, а є перш за все специфічним способом розв'язування.

На відміну від лінійного програмування, в якому симплексний метод є універсальним методом розв'язування, в динамічному програмуванні такого універсального методу не існує. Одним з основних методів динамічного програмування є метод рекурентних співвідношень, який ґрунтується на використанні *принципу оптимальності*, який розроблений американським математиком Р. Беллманом. Очевидно, повне розуміння цього принципу стає можливим (для осіб зі звичайним математичним розвитком) тільки після розгляду ряду прикладів, тому цей основний принци наводиться не на початку розділу, а у параграфі 9.3. Для застосування методу динамічного програмування до конкретної задачі остання повинна мати відповідну структуру. Особливістю усіх таких задач є те, що на кожному етапі можна керувати перебігом досліджуваного процесу та оцінювати ефективність такого управління. Крім того, реалізація цих методів зв’язана з значною кількістю обчислень, яка різко зростає і стає непереборною із збільшенням числа обмежень задачі.

Таким чином динамічне програмування визначає оптимальний розв’язок задачі шляхом її декомпозиції на етапи, кожен з яких являє собою однокрокову підзадачу.

Розглянемо деяку операцію $G$, яка розпадається на $m$ кроків (етапів), – наприклад, діяльність галузі промисловості на протязі ряду господарських років. Деякі операції розпадаються на етапи природним шляхом, як вищенаведена; в інших ситуаціях поділ на етапи може мати умовний характер. Нехай ефективність операції $G$ характеризується показником $Z$ (цільова функція). Припустимо, що показник ефективності всієї операції складається з показників ефективностей окремих кроків:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} z_i ,$$

де $z_i$ – показник ефективності $i$-го кроку.

Якщо $Z$ має таку властивість, то її називають *адитивною цільовою функцією*.

Операція $G$ являє собою керований процес, тобто ми можемо обирати деякі параметри, які впливають на його хід, причому на кожному кроці обирається якесь рішення, від якого залежить ефективність на даному кроці і ефективність операції в цілому. Будемо називати це рішення *кроковим управлінням*. Сукупність усіх крокових управлінь являє собою управління операції в цілому. Позначимо його літерою $x$, крокові управління – літерами $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Слід мати на увазі, що $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в загальному випадку –не числа, а, може бути, вектори, функції і т. д.

Необхідно знайти таке управління $x$, при якому $Z$ обертається у максимум:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} z_i \to \max .$$

Те управління $x^*$, при якому цей максимум досягається, називається *оптимальним управлінням*. Воно складається із сукупності оптимальних крокових управлінь:

$$x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*\right).$$

Максимум, який досягається при цьому управлінні, будемо позначати $Z^*$:

$$Z^* = \max\{Z(x)\}.$$

Розглянемо декілька прикладів багатокрокових операцій.

1. Планується діяльність групи промислових підприємств $П_1$, $П_2$, ..., $П_k$ на період *m* господарських років. На початку періоду виділені деякі кошти *M*, які повинні бути розподілені між підприємствами. В процесі роботи підприємства вкладені у нього кошти частково витрачаються (амортизуються), а частково зберігаються і знову можуть бути перерозподілені. Кожне підприємство за рік приносить прибуток, який залежить від того, скільки коштів в нього вкладено. На початку кожного господарського року кошти, які є в наявності, перерозподіляються між підприємствами. Ставиться питання: яку кількість коштів на початку кожного року виділяти необхідно кожному підприємству, щоб сумарний прибуток за *m* років був максимальний?

Цільова функція *Z* (сумарний прибуток) являє собою суму прибутків на окремих кроках (роках):

$$Z = \sum_{i=1}^{m} z_i ,$$

і, отже, має властивість адитивності.

Управління $x_i$ на *i*-му кроці складається з того, що на початку кожного року виділяються деякі кошти $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$ (перший індекс – номер кроку, другий – номер підприємства). Таким чином, крокове управління є вектор з *k* складовими:

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}).$$

Зрозуміло, що величини $z_i$ залежать від кількості вкладених у підприємство коштів.

Управління $x$ всією операцією складається з сукупності усіх крокових управлінь:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Треба знайти такий розподіл коштів за підприємствами і за роками (оптимальне управління $x^*$), при якому величина $Z$ набуває максимуму.

У цьому прикладі крокові управління були векторами.

2. Космічна ракета складається з $m$ ступіней, а процес виводу її на орбіту – з $m$ етапів, в кінці кожного з яких чергова ступінь скидається. На всі ступіні (без урахування „корисної ваги” кабіни) виділена деяка загальна вага:

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_m,$$

де $P_i$ –вага $i$-ї ступіні.

В результаті $i$-го етапу (згоряння і скидання $i$-ї ступіні) ракета отримує приріст швидкості $\Delta v_i$, який залежить від ваги даної ступіні і сумарної ваги усіх інших плюс вага кабіни. Запитується, як треба розподілити вагу $P$ між ступінями, щоб швидкість ракети $v$ при її виводі на орбіту була максимальною?

В даному випадку показник ефективності буде

$$v = \sum_{i=1}^{m} \Delta v_i,$$

де $\Delta v_i$ – показник ефективності (приріст швидкості) $i$-го кроку.

Управління $x$ являє собою сукупність ваг усіх ступіней $P_i$:

$$x = (P_1, P_2, \ldots, P_m).$$

Оптимальним управлінням $x^*$ буде той розподіл ваг за ступінями, при якому швидкість $v$ максимальна. В цьому прикладі крокове управління – одне число, а саме, вага даної ступіні.

3. Власник автомобіля експлуатує її на протязі $m$ років. На початку кожного року він може прийняти одне з трьох рішень:

1) продати автомобіль і купити новий;
2) відремонтувати його та продовжувати експлуатацію;
3) продовжити експлуатацію без ремонту.

Крокове управління – вибір одного з цих трьох рішень. Безпосередньо числами вони не виражаються, але можна приписати першому числове значення 1, другому 2, третьому 3. Які необхідно прийняти рішення за роками (тобто як чергувати управління 1, 2, 3), щоб сумарні витрати на експлуатацію, ремонт і придбання нових автомобілів були мінімальні?

Показник ефективності (в даному випадку він повинен бути не максимальним, а мінімальним) дорівнює

$$Z = \sum_{i=1}^{m} z_i \, ,$$

де $z_i$ – витрати у $i$-му році. Величину $Z$ треба звести до мінімуму.

Управління операцією в цілому являє собою деяку комбінацію чисел 1, 2, 3, наприклад:

$$x = (3, 3, 2, 2, 2, 1, 3, \ldots),$$

що означає: перші два роки експлуатувати автомобіль без ремонту, наступні три роки його ремонтувати, на початку шостого року продати, купити новий, потім знову експлуатувати без ремонту і т. д. Будь-яке управління являє собою вектор (сукупність чисел):

$$x = (l_1, l_2, \ldots, l_m),$$

де кожне з чисел $l_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ має одне з трьох значень: 1, 2 або 3. Треба таку сукупність чисел, при якій цільова функція мінімальна.

4. Треба прокласти залізничний шлях між пунктами $A$ і $B$. Місцевість пересічна, є лісові зони, пагорби, болота, річка, через яку треба побудувати міст. Необхідно так провести дорогу з $A$ в $B$, щоб сумарні витрати на споруду ділянки були мінімальні.

В цієї задачі, на відміну від трьох попередніх, немає природного поділу на кроки: його треба робити штучно, для чого, наприклад, можна відрізок *AB* розділити на $m$ ділянок, провести через точки поділу прямі, перпендикулярні *AB*, і вважати за крок перехід з однієї такої прямої до іншої. Якщо провести їх достатньо близько одна від іншої, то можна вважати на кожному кроці ділянку шляху прямолінійним. Крокове управління на $i$-му кроці являє собою кут $\varphi_i$, який складає ділянка шляху з прямою *AB*. Управління всією операцією складається з сукупності крокових управлінь:

$$x = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m).$$

Треба обрати таке (оптимальне) управління $x^*$, при якому сумарні витрати на споруду всіх ділянок мінімальні.

Розглянемо питання: як можна розв'язувати задачі подібні тим, що наведені у прикладах?

Будь-яку багатокрокову задачу можна розв'язувати двома способами: або шукати відразу всі елементи розв'язку на всіх $m$ кроках, або ж будувати оптимальне управління крок за кроком, на кожному етапі розрахунку оптимізуючи тільки один крок. Звичайно другий спосіб оптимізації виявляється простішим, ніж перший, особливо при великій кількості кроків.

Така ідея рекурентної (поступової, покрокової) оптимізації і лежить в основі методу динамічного програмування. Оптимізація одного кроку, як правило, простіше оптимізації всього процесу: краще, виявляється, багато разів розв'язувати порівняно просту задачу, ніж один раз – складну.

Принцип динамічного програмування зовсім не передбачає, що кожен крок оптимізується окремо, незалежно від інших. Навпаки, крокове управління повинно обиратися далекоглядно, з урахуванням всіх його наслідків в майбутньому. Який сенс, що ми оберемо на даному етапі управління, при якому ефективність цього кроку максимальна, якщо цей крок позбавить нас можливості отримати значну перевагу на наступних кроках?

Нехай, наприклад, планується робота групи підприємств, з яких частина зайнята випуском предметів споживання, а решта виготовляє для них устаткування. Задача операції – отримати за $m$ років максимальний об'єм випуску предметів споживання. Припустимо, плануються капіталовкладення на перший рік. Виходячи з вузьких інтересів цього кроку (року), ми повинні були б всі наявні кошти вкласти у виробництво предметів споживання. Але чи правильним буде таке рішення з точки зору ефективності операції в цілому? Очевидно, ні. Це рішення – марнотратне, недалекоглядне. З погляду на майбутнє, треба виділити якусь частку коштів і на виробництво устаткувань. Від цього об'єм продукції за перший рік, звичайно, знизиться, проте будуть створені умови для його збільшення в наступні роки.

Ще один приклад. Припустимо, що в задачі 4 (прокладення залізничного шляху між $A$ і $B$) ми захопимось ідеєю відразу же прямувати по найбільш легкому (дешевому) напрямку. Яка користь від економії на першому кроці, якщо в подальшому він заведе нас (буквально чи фігурально) у „болото"?

Обчислення в динамічному програмуванні виконуються рекурентно в тому розумінні, що оптимальний розв'язок підзадачі на одному етапі використовується в якості вихідних даних для підзадачі наступного етапу. Розв'язавши підзадачу на останньому етапі, ми отримуємо оптимальний розв'язок вихідної задачі. Спосіб виконання рекурентних обчислень залежить від того, як виконується декомпозиція вихідної задачі. Зокрема, підзадачі на кожному етапі зв'язані між собою деякими загальними обмеженнями. Якщо здійснюється перехід від однієї підзадачі до іншої, то повинні враховуватись ці обмеження.

Розглянемо, як приклад, задачу про найкоротший шлях.

**Приклад 9.1.** Припустимо, що треба вибрати коротший шлях між двома містами. Сітка доріг, що показана на рис. 9.1, являє собою можливі маршрути між вихідним містом, яке знаходиться у вузлі 1, і кінцевим пунктом, який знаходиться у вузлі 7. Маршрути проходять через проміжні міста, позначені на сітці вузлами з номерами 2-6.

*Розв'язання.* Ми можемо розв'язати цю задачу простим повним перебором усіх маршрутів між вузлами 1 і 7 (є п'ять таких маршрутів). Однак у великій сітці повний перебір буде неефективним з обчислювальної точки зору.

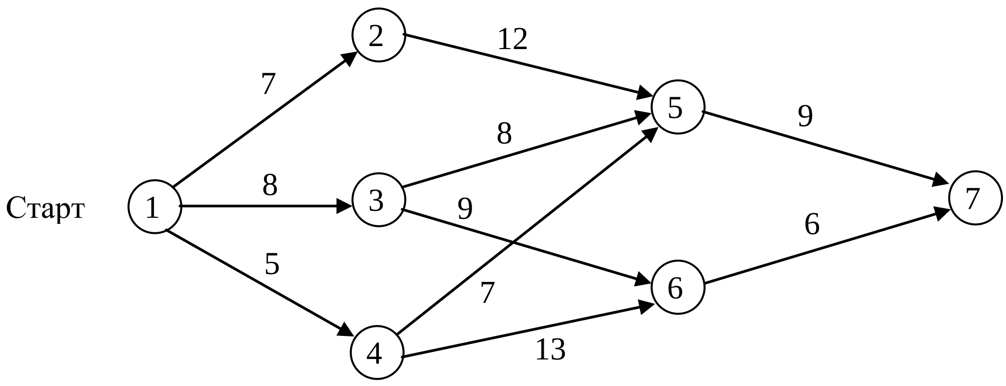



Рис. 9.1

Щоб розв'язати цю задачу методом динамічного програмування спочатку розділимо її на етапи. Вертикальні пунктирні лінії на рис. 9.2 відокремлюють три етапи задачі. Далі виконуються обчислення для кожного етапу окремо.

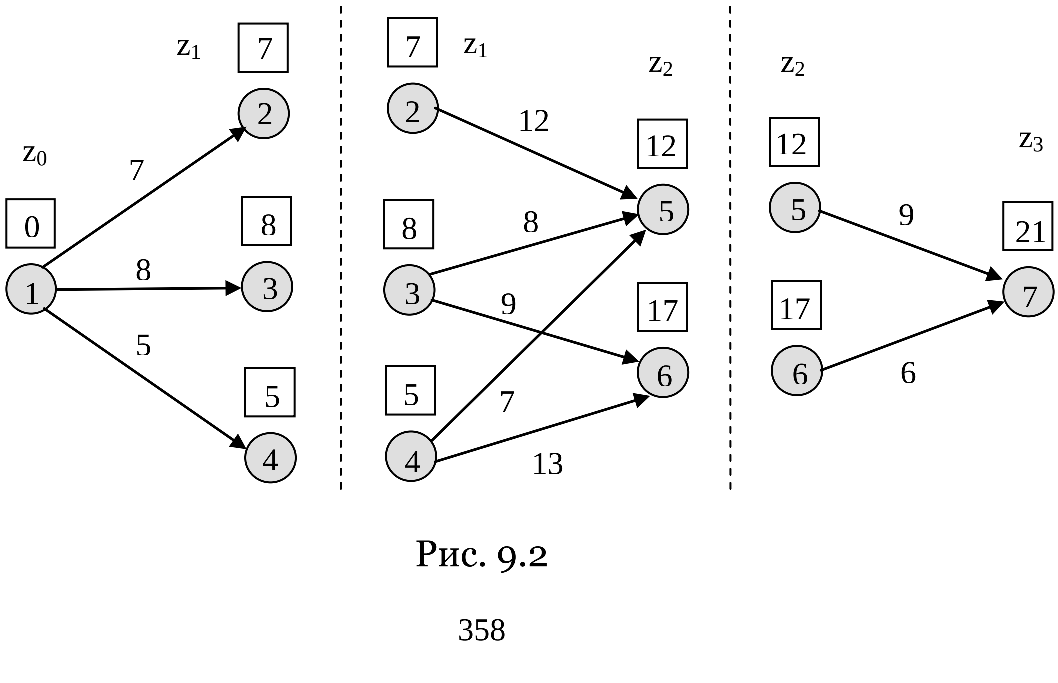



Рис. 9.2

Загальна задача полягає в обчислені коротших (поступово накопичуються) відстаней до всіх вершин етапу з послідовним використанням цих відстаней в якості вихідних даних для наступного етапу. Розглядаючи вузли, які відносяться до першого етапу, відмічаємо, що кожен з вузлів 2, 3 і 4 зв'язаний з початковим вузлом 1 єдиною дугою (рис. 9.2). Отже, для першого етапу маємо наступне.

*Етап 1. Підсумкові результати.*

Коротший шлях до вузла 2 дорівнює 7 км (з вузла 1),

Коротший шлях до вузла 3 дорівнює 8 км (з вузла 1),

Коротший шлях до вузла 4 дорівнює 5 км (з вузла 1).

Далі переходимо до другого етапу для обчислення коротших (накопичених) відстаней до вузлів 5 і 6. Розглянемо вузол 5 першим, з рис. 9.2 помічаємо, що є три можливі маршрути, за якими можна досягти вузла 5, а саме (2, 5), (3, 5) і (4, 5). Ця інформація разом з коротшими відстанями до вузлів 2, 3 і 4 визначає коротшу (накопичену) відстань до вузла 5 наступним чином.

$$\begin{pmatrix} \textit{Коротший} \\ \textit{шлях до вузла } 5 \end{pmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 7+12=19 \\ 8+8=16 \\ 5+7=12 \end{Bmatrix} = 12 \text{ (з вузла 4).}$$

Аналогічно для вузла 6 маємо наступне.

$$\begin{pmatrix} \textit{Коротший} \\ \textit{шлях до вузла } 6 \end{pmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 8+9=17 \\ 5+13=18 \end{Bmatrix} = 17 \text{ (з вузла 3).}$$

*Етап 2. Підсумкові результати.*

Коротший шлях до вузла 5 дорівнює 12 км (з вузла 4),

Коротший шлях до вузла 6 дорівнює 17 км (з вузла 3).

Останнім кроком є третій етап. Кінцевого вузла 7 можна досягти як з вузла 5, так і 6. Використовуючи підсумкові результати етапу 2 і відстані від вузлів 5 та 6 до вузла 7, отримуємо наступне.

$$\begin{pmatrix} \textit{Коротший} \\ \textit{шлях до вузла } 7 \end{pmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 12+9=21 \\ 17+6=23 \end{Bmatrix} = 21 \text{ (з вузла 5).}$$

*Етап 3. Підсумкові результати.*

Коротший шлях до вузла 7 дорівнює 21 км (з вузла 5).

Наведені обчислення показують, що коротша відстань між вузлами 1 і 7 дорівнює 21 км, а оптимальним маршрутом є послідовність 1-4-5-7.

---

Тепер покажемо, як рекурентні обчислення динамічного програмування можна виразити математично. Нехай $f_i(x_i)$ – коротша відстань до вершини $x_i$ на етапі *i*, $d(x_{i-1}, x_i)$ – відстань від вузла $x_{i-1}$ до вузла $x_i$. Тоді $f_i$ обчислюється з $f_{i-1}$ за допомогою наступного рекурентного рівняння.

$f_i(x_i) = \min\{d(x_{i-1}, x_i) + f_{i-1}(x_{i-1})\}$, $i = 1, 2, 3$ (мінімум шукається серед всіх можливих маршрутів $(x_{i-1}, x_i)$).

При $i = 1$ приймаємо $f_0(x_0) \equiv 0$. Рекурентне рівняння показує, що коротша відстань $f_i(x_i)$ на етапі *i* повинні бути виражені як функції наступного вузла $x_i$.

Отже, *плануючи багатокрокову операцію, треба обирати управління на кожному кроці з урахуванням усіх його майбутніх наслідків на кроках, які ще будуть здійснені.* Управління на і-му кроці обирається не так, щоб ефективність саме на даному кроці була максимальною, а так, щоб була максимальна сума ефективностей на всіх кроках, які залишилися, плюс даний.

Проте з цього правила є виключення. Серед усіх кроків є один, який може плануватись без розрахунків на майбутнє. Який це крок? Очевидно, останній! Цей крок, єдиний з усіх, можна планувати так, щоб він сам по собі приніс найбільшу ефективність.

Тому процес динамічного програмування звичайно розгортається від кінця до початку: перш за все планується останній, $m$-й крок. Така послідовність обчислень відома як *алгоритм зворотної прогонки.* Послідовність обчислень від першого етапу до останнього називається *алгоритмом прямої прогонки.*

Алгоритми прямої і зворотної прогонки приводять до одного й того ж розв'язку. Не дивлячись на те, що алгоритм прямої прогонки представляється більш логічним, в спеціальній літературі, присвяченій динамічному програмуванню, незмінно використовується алгоритм зворотної прогонки. Причина цього в тому, що в загальному випадку алгоритм зворотної прогонки може бути більш ефективним з обчислювальної точки зору.

---

**Приклад 9.2**. Продемонструємо використання алгоритму зворотної прогонки на прикладі 9.1.

*Розв'язання.* Ми також представимо обчислення динамічного програмування в компактній табличній формі.

Рекурентне рівняння для алгоритму зворотної прогонки у прикладі 9.1 має вигляд

$$f_i(x_i) = \min\{d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i+1})\},\ i = 3,2,1,$$

де $f_4(x_4) \equiv 0$ для $x_4 = 7$. Відповідною послідовністю обчислень буде $f_3 \to f_2 \to f_1$.

*Етап 3*. Так як вузол 7 ($x_4 = 7$) зв'язаний з вузлами 5 та 6 ($x_3 = 5;6$) тільки одним маршрутом, то альтернатива вибору відсутня, а результати третього етапу можна підбити наступним чином (табл. 9.1).

Таблиця 9.1

| $x_3$ | $d(x_3, x_4)$ | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|---|
| | $x_4 = 7$ | $f_3(x_3)$ | $x_4^*$ |
| 5 | 9 | 9 | 7 |
| 6 | 6 | 6 | 7 |

*Етап 2*. Так як маршруту $(2,6)$ не існує, відповідна альтернатива не розглядається. Використовуючи значення $f_3(x_3)$, яке отримане на третьому етапі, ми можемо порівняти допустимі альтернативні розв'язки, показані у таблиці 9.2.

Таблиця 9.2

| $x_2$ | $d(x_2, x_3) + f_3(x_3)$ | | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|---|---|
| | $x_3 = 5$ | $x_3 = 6$ | $f_2(x_2)$ | $x_3^*$ |
| 2 | 12+9=21 | – | 21 | 5 |
| 3 | 8+9=17 | 9+6=15 | 15 | 6 |
| 4 | 7+9=16 | 13+6=19 | 16 | 5 |

Оптимальний розв'язок другого етапу означає наступне. Якщо ви знаходитесь у вузлі (місті) 2 або 4, коротший шлях до вузла 7 проходить через вузол 5, а якщо знаходитесь у вузлі 3, коротший шлях до вузла 7 проходить через вузол 6.

*Етап 1.* З вузла 1 ми маємо три альтернативних маршрути: (1, 2), (1, 3) та (1, 4). Використовуючи значення $f_2(x_2)$, одержані на другому етапі, обчислюємо дані таблиці 9.3.

Таблиця 9.3

| $x_1$ | $d(x_1, x_2) + f_2(x_2)$ | | | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_2 = 2$ | $x_2 = 3$ | $x_2 = 4$ | $f_1(x_1)$ | $x_2^*$ |
| 1 | 7+21=28 | 8+15=23 | 5+16=21 | 21 | 4 |

Оптимальний розв'язок на першому етапі показує, що коротший шлях проходить через вузол 4. Далі з оптимального розв'язку на другому етапі випливає, що з вузла 4 необхідно рухатись у вузол 5. Нарешті, з оптимального розв'язку на третьому етапі випливає, що вузол 5 зв'язаний з вузлом 7. Отже, повним маршрутом, який має коротшу довжину, є 1–4–5–7, і його довжина дорівнює 21 км.

Очевидно, що дійсне розуміння методу динамічного програмування з'являється при розгляді конкретних прикладів, які будуть розглянуті у наступному параграфі.

## 1.2. Деякі економічні задачі, які розв'язуються методами динамічного програмування

При розгляді кожного прикладу зверніть увагу на три основні елементи моделей динамічного програмування.

1. Визначення *етапів*.
2. Визначення на кожному етапі *варіантів розв'язку* (альтернатив).
3. Визначення *стану* на кожному етапі.

### *Задача про заміну обладнання.*

Однією з важливих економічних проблем є визначення оптимальної стратегії в заміні старих станків, агрегатів, машин (в подальшому обладнання) на нові.

Старіння обладнання включає його фізичне і моральне зношування, в наслідок чого зростають виробничі витрати при випуску продукції на старому обладнанні, збільшуються витрати на його ремонт та обслуговування, знижується продуктивність і ліквідна вартість.

Настає час, коли старе обладнання вигідніше продати, замінити новим, ніж експлуатувати ціною великих витрат. Причому його можна замінити новим обладнанням того ж виду або новим, більш досконалим.

Оптимальна стратегія заміни обладнання полягає у визначені оптимальних термінів експлуатації до заміни. Критерієм оптимальності при цьому може бути прибуток від експлуатації обладнання, який треба максимізувати, або сумарні витрати на експлуатацію на протязі певного проміжку часу, які підлягають мінімізації.

Припустимо, що ми займаємось заміною обладнання на протязі $n$ років. На початку кожного року приймається рішення або про експлуатацію обладнання ще один рік, або про заміну його новим.

Введемо позначення: $r(t)$ – вартість продукції, яка виробляється за один рік на одиниці обладнання віком $t$ років (або прибуток від експлуатації на протязі одного року);

$u(t)$ – щорічні витрати на обслуговування обладнання віком $t$ років;

$s(t)$ – залишкова вартість обладнання віком $t$ років;

$P$ – вартість придбання нового обладнання.

*Елементи моделі динамічного програмування такі*:

1. *Етап i* зображається порядковим номером року *i*, $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. *Варіантами розв'язку* на *i*-му етапі (тобто для *i*-го року) є альтернативи: *продовжити експлуатацію* або *замінити* обладнання *на початку* *i*-го року.
3. *Станом* на *i*-му етапі є термін експлуатації $t$ (рік) обладнання на початок *i*-го року.

Позначимо через $f_i(t)$ максимальний прибуток, який отримується за роки від *i* до $n$ при умові, що на початку *i*-го року маємо обладнання віком $t$ років.

Рекурентне рівняння має наступний вигляд:

$$f_i(t) = \max\left\{ \begin{array}{ll} r(t) - u(t) + f_{i+1}(t+1), & \textit{якщо експлуатувати обладнання} \\ r(0) - u(0) + s(t) - P + f_{t+1}(1), & \textit{якщо замінити обладнання} \end{array} \right\}$$

В рівнянні функція $r(t) - u(t)$ є різниця між вартістю виробленої продукції і експлуатаційними витратами на *i*-му етапі.

Функція $f_{i+1}(t+1)$ характеризує сумарний прибуток від етапів, що залишаються (тобто від $(i+1)$-го до $n$-го), для обладнання віком $(t+1)$ рік.

Нижній рядок характеризується наступним чином: функція $s(t) - P$ являє чисті витрати по заміні обладнання, вік якого $t$ років.

Припускається, що перехід від роботи на обладнанні віком $t$ років до роботи на новому обладнанні відбувається миттєво, тобто період заміни старого обладнання і перехід на роботу на новому обладнанні входять в один і той же етап.

Слід відмітити, що $f_{n+1}(\ldots) \equiv 0$ за означенням функції $f_i(t)$, тобто для $i = n$ маємо наступні рекурентні рівняння:

$$f_n(t) = \max \begin{Bmatrix} r(t) - u(t) + s(t+1), \ \textit{якщо експлуатувати обладнання} \\ r(0) - u(0) + s(t) - P + s(1), \ \textit{якщо замінити обладнання} \end{Bmatrix},$$

в якому функції $f_{n+1}(t+1)$ і $f_{n+1}(1)$ замінені залишковими вартостями обладнання на кінець $n$-го етапу: $s(t+1)$ і $s(1)$.

Рекурентне рівняння дає можливість не тільки обрати лінію поведінки при розв’язанні питання про збереження або заміну обладнання, але й визначає прибуток, який отримується при прийнятті кожного з цих рішень.

**Приклад 9.3.** Компанія планує визначити оптимальну політику заміни наявного на даний час трьохлітнього обладнання на протязі чотирьох наступних років ($n = 4$), тобто до початку п’ятого року. Наведена таблиця 9.4 містить дані задачі.

Таблиця 9.4

| Вік $t$ (роки) | Прибуток $r(t)$ (грн) | Вартість обслуговування $u(t)$ (грн) | Залишкова вартість $s(t)$ (грн) |
|---|---|---|---|
| 0 | 20 000 | 200 | – |
| 1 | 19 000 | 600 | 80 000 |
| 2 | 18 500 | 1 200 | 60 000 |
| 3 | 17 200 | 1 500 | 50 000 |
| 4 | 15 500 | 1 700 | 30 000 |
| 5 | 14 000 | 1 800 | 10 000 |
| 6 | 12 200 | 2 200 | 5 000 |

Компанія вимагає заміни обладнання, яке знаходиться в експлуатації шість років. Вартість нового обладнання дорівнює 100 000 грн.

*Розв’язання.* Визначення допустимих значень віку обладнання на кожному етапі є нетривіальною задачею. На рис. 9.3 дана задача представлена у вигляді сітки. На початку першого року маємо обладнання трьохрічного віку. Ми можемо або замінити його (*З*), або експлуатувати (*E*) на протязі наступного року. Якщо обладнання замінили, то на початку другого року його вік буде дорівнювати одному року, у протилежному випадку його вік буде чотири роки. Такий же підхід використовується на початку кожного року, починаючи з другого по четвертий.

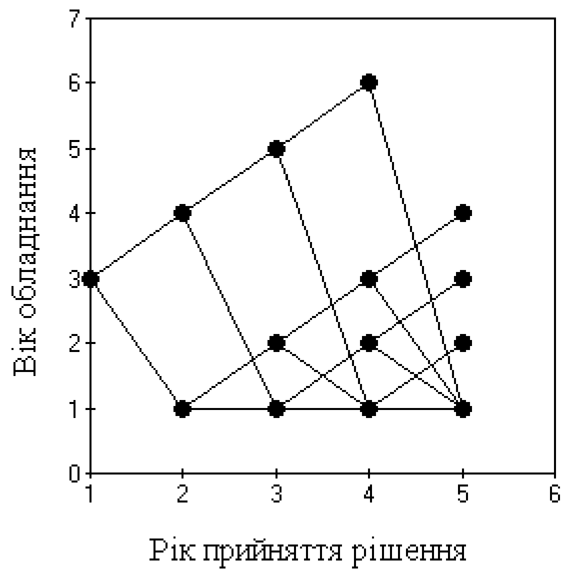



Рис. 9.3

Якщо однорічне обладнання замінити на початку другого або третього року, то обладнання, яке його замінює, на початок наступного року також буде однорічним. До того ж, на початку четвертого року шестирічне обладнання обов’язково повинно бути замінене, якщо воно ще експлуатується. На кінець четвертого року все обладнання продається в обов’язковому порядку. На схемі сітки (рис. 9.3) також видно, що на початку другого року можливе тільки обладнання з терміном експлуатації один або чотири роки. На початку третього року обладнання може мати вік один, два або п’ять років, а на початку четвертого – один, два, три або шість років.

Розв’язування даної задачі еквівалентне знаходженню маршруту максимальної довжини (який приносить максимальний прибуток) від початку першого року до закінчення четвертого у сітці, яка показана на рис. 9.3. При розв’язуванні цієї задачі використаємо табличну форму запису (числові дані в таблиці кратні тисячам грн.).

*Етап 4.*

Таблиця 9.5

| $t$ | $E$ | $З$ | Оптимум | |
|---|---|---|---|---|
| | $r(t)-u(t)+s(t+1)$ | $r(0)-u(0)+s(t)-P+s(1)$ | $f_4(t)$ | Розв'язок |
| 1 | 19,0–0,6+60=78,4 | 20–0,2+80–100+80=79,8 | 79,8 | *З* |
| 2 | 18,5–1,2+50=67,3 | 20–0,2+60–100+80=59,8 | 67,3 | *E* |
| 3 | 17,2–1,5+30=45,7 | 20–0,2+50–100+80=49,8 | 49,8 | *З* |
| 6 | Необхідна заміна | 20–0,2+5–100+80=4,8 | 4,8 | *З* |

*Етап 3.*

Таблиця 9.6

| $t$ | $E$ | $З$ | Оптимум | |
|---|---|---|---|---|
| | $r(t)-u(t)+f_4(t+1)$ | $r(0)-u(0)+s(t)-P+f_4(1)$ | $f_3(t)$ | Розв'язок |
| 1 | 19,0–0,6+67,3=85,7 | 20–0,2+80–100+79,8=79,6 | 85,7 | *E* |
| 2 | 18,5–1,2+49,8=67,1 | 20–0,2+60–100+79,8=59,6 | 67,1 | *E* |
| 5 | 14,0–1,8+4,8=17,0 | 20–0,2+10–100+79,8=9,6 | 17,0 | *E* |

*Етап 2.*

Таблиця 9.7

| $t$ | $E$ | $З$ | Оптимум | |
|---|---|---|---|---|
| | $r(t)-u(t)+f_3(t+1)$ | $r(0)-u(0)+s(t)-P+f_3(1)$ | $f_2(t)$ | Розв'язок |
| 1 | 19,0–0,6+67,1=85,5 | 20–0,2+80–100+85,7=85,5 | 85,5 | *E* або *З* |
| 4 | 15,5–1,7+17,0=30,8 | 20–0,2+30–100+85,7=35,5 | 35,5 | *З* |

*Етап 1.*

Таблиця 9.8

| $t$ | $E$ | $З$ | Оптимум | |
|---|---|---|---|---|
| | $r(t)-u(t)+f_2(t+1)$ | $r(0)-u(0)+s(t)-P+f_2(t)$ | $f_1(t)$ | Розв'язок |
| 1 | 17,2–1,5+35,5=51,2 | 20–0,2+50–100+85,5=55,3 | 55,3 | *З* |

Розглянемо послідовність отримання оптимального розв'язку. На початку першого року оптимальним розв'язком при $t = 3$ є заміна обладнання. Отже, нове обладнання до початку другого року буде знаходитись в експлуатації один рік. При $t = 1$ на початку другого року оптимальним розв'язком буде або використання або заміна обладнання. Якщо воно замінюється, то нове до початку третього року буде знаходитись в експлуатації один рік, інакше обладнання буде мати вік два роки. Описаний процес продовжується доти, поки не буде визначений оптимальний розв'язок для четвертого року.

Отже, починаючи з першого року експлуатації обладнання, альтернативними оптимальними стратегіями відносно заміни обладнання будуть (*З*, *Е*, *Е*, *З*) та (*З*, *З*, *Е*, *Е*). Загальний прибуток складає 55 300 грн.

---

***Задача про розподіл ресурсів.***

Нехай є деяка кількість ресурсів $x$, які необхідно розподілити між $n$ різними підприємствами, об'єктами, роботами і т. д. так, щоб отримати максимальну сумарну ефективність від обраного способу розподілу.

Введемо позначення: $x_i$ – кількість ресурсів, які виділяються *i*-му підприємству ($i = 1, 2, \ldots, n$);

$g_i(x_i)$ – функція корисності, в даному випадку це величина прибутку від використання ресурсу $x_i$, отриманого *i*-м підприємством;

$f_k(x)$ – найбільший прибуток, який можна отримати при використанні ресурсів $x$ від перших $k$ різних підприємств.

Сформульовану задачу можна записати у математичній формі:

$$f_n(x) = \max \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для розв'язання задачі необхідно отримати рекурентне рівняння, яке зв'язує $f_k(x)$ і $f_{k-1}(x)$.

Позначимо через $x_k$ кількість ресурсу, який використовується $k$-м способом ($0 \le x_k \le x$), тоді для $(k-1)$ способів залишається величина ресурсів, рівна $(x - x_k)$. Найбільший прибуток, який отримується при використанні ресурсу $(x - x_k)$ від перших $(k-1)$ способів, складе $f_{k-1}(x - x_k)$.

Для максимізації сумарного прибутку від $k$-го і перших $(k-1)$ способів необхідно вибрати $x_k$ таким чином, щоб виконувались рівняння

$$f_1(x) = g_1(x),$$

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\},\ k = 2, 3, \dots, n.$$

Розглянемо конкретну задачу по розподілу капіталовкладень між підприємствами.

***Задача інвестування.***

**Приклад 9.4.** Рада директорів фірми розглядає пропозиції по нарощуванню виробничих потужностей для збільшення випуску однорідної продукції на чотирьох підприємствах, які належать фірмі.

Для розширення виробництва рада директорів виділяє кошти в об'ємі 120 млн. грн. з дискретністю 20 млн. грн. Приріст випуску продукції на підприємствах залежить від виділеної суми, його значення представлені підприємствами і містяться у таблиці 9.9.

Знайти розподіл коштів між підприємствами, який забезпечує максимальний приріст випуску продукції, причому на одне підприємство можна здійснити не більше однієї інвестиції.

Таблиця 9.9

| Виділені кошти, млн. грн. | Приріст випуску продукції, млн. грн. по підприємствам | | | |
|---|---|---|---|---|
| | № 1 | № 2 | № 3 | № 4 |
| 20 | 8 | 10 | 12 | 11 |
| 40 | 16 | 20 | 21 | 23 |
| 60 | 25 | 28 | 27 | 30 |
| 80 | 36 | 40 | 38 | 37 |
| 100 | 44 | 48 | 50 | 51 |
| 120 | 62 | 62 | 63 | 63 |

*Розв'язання.* Розіб'ємо розв'язування задачі на чотири етапи за кількістю підприємств, на яких передбачається здійснити інвестування.

Рекурентні рівняння будуть мати вигляд:

для підприємства № 1

$$f_1(x) = g_1(x_1),$$

для всіх інших підприємств

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\},\ k = 2,3,4.$$

Розв'язування будемо проводити згідно рекурентним рівнянням у чотири етапи.

*Етап 1.* Інвестиції робимо тільки першому підприємству. Тоді

$$f_1(20) = 8,\ f_1(40) = 16,\ f_1(60) = 25,\ f_1(80) = 36,\ f_1(100) = 44,\ f_1(120) = 62.$$

*Етап 2.* Інвестиції виділяємо першому і другому підприємствам. Рекурентне рівняння має вигляд

$$f_2(x) = \max\{g_2(x_2) + f_1(x - x_2)\}.$$

Тоді

при $x = 20$: $f_2(20) = \max\{0 + 8, 10 + 0\} = \max\{8, 10\} = 10$;

при $x = 40$: $f_2(40) = \max\{0 + 16, 10 + 8, 20 + 0\} = \max\{16, 18, 20\} = 20$;

при $x = 60$: $f_2(60) = \max\{25, 10 + 16, 20 + 8, 28\} = \max\{25, 26, 28, 28\} = 28$;

при $x = 80$: $f_2(80) = \max\{36, 10 + 25, 20 + 16, 28 + 8, 40\} = 40$;

при $x = 100$: $f_2(100) = \max\{44, 10 + 36, 20 + 25, 28 + 16, 40 + 8, 48\} = 48$;

при $x = 120$: $f_2(120) = \max\{62,10 + 44,20 + 36,28 + 25,40 + 16,48 + 8,62\} = 62$.

*Етап 3.* Фінансуємо другий етап і третє підприємство. Розрахунки проводимо за формулою

$$f_3(x)\max\{g_3(x_3) + f_2(x - x_3)\}.$$

Тоді

при $x = 20$: $f_3(20) = \max\{12,10\} = 12$;

при $x = 40$: $f_3(40) = \max\{20,12 + 10,21\} = 22$;

при $x = 60$: $f_3(60) = \max\{28,12 + 20,21 + 10,27\} = 32$;

при $x = 80$: $f_3(80) = \max\{40,12 + 28,21 + 20,27 + 10,38\} = 41$;

при $x = 100$: $f_3(100) = \max\{48,12 + 40,21 + 28,27 + 20,38 + 10,50\} = 52$;

при $x = 120$: $f_3(120) = \max\{62,12 + 48,21 + 40,27 + 28,38 + 20,50 + 10,63\} = 63$.

*Етап 4.* Інвестиції в об'ємі 120 млн. грн. розподіляємо між третім етапом та четвертим підприємством.

При $x = 120$:
$f_4(120) = \max\{63,11 + 52,23 + 41,30 + 31,37 + 22,51 + 12,63\} = 64$.

Отримані умови управління від першого до четвертого етапів. Повернемось від четвертого до першого етапу. Максимальний приріст випуску продукції в 64 млн. грн. отриманий на четвертому етапі як 23+41, тобто 23 млн. грн. відповідають виділенню четвертому підприємству 40 млн. грн. (див. табл. 9.9). Згідно третьому етапу 41 млн. грн. отримано як 21+20, тобто 21 млн. грн. відповідає виділенню третьому підприємству 40 млн. грн. Згідно з другим етапом 20 млн. грн. отримано при виділені 40 млн. грн. другому підприємству.

Таким чином, інвестиції в об'ємі 120 млн. грн. доцільно виділити другому, третьому і четвертому підприємствам по 40 млн. грн. кожному, при цьому приріст продукції буде максимальним і складатиме 64 млн. грн.

***Задача про завантаження.***

Задача про завантаження – це задача про раціональне завантаження судна, літака, автомобіля і т. п., які мають обмеження по об'єму або вантажності. Кожний розміщений на засобі пересування вантаж приносить певний прибуток. Задача полягає у визначені завантаження засобу пересування такими вантажами, які приносять максимальний прибуток.

Рекурентне рівняння процедури зворотної прогонки виводиться для загальної задачі завантаження засобу пересування вантажністю $W$ предметів $n$ найменувань. Нехай $m_i$ – кількість предметів $i$-го найменування, які необхідно завантажити, $r_i$ – прибуток, який дає один завантажений предмет $i$-го найменування, $w_i$ – вага одного предмету $i$-го найменування. Загальна задача має вигляд наступної цілочислової задачі лінійного програмування.

Максимізувати $z = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \ldots + r_n m_n = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i$

при умові, що

$$w_1 m_1 + w_2 m_2 + \ldots w_n m_n \le W \,,$$

$$m_1, m_2, \ldots, m_n \ge 0 \text{ та цілі.}$$

Три елементи моделі динамічного програмування визначаються наступним чином.

1. *Етап* $i$ ставиться у відповідність предмету $i$-го найменування, $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. *Варіанти розв'язку* на етапі $i$ описуються кількістю $m_i$ предметів $i$-го найменування, які підлягають завантаженню. Відповідний прибуток дорівнює $r_i m_i$. Значення $m_i$ лежить у межах від 0 до $[W/w_i]$, де $[W/w_i]$ – ціла частина числа $W/w_i$.

3. Стан $x_i$ на етапі *i* виражає сумарну вагу предметів, рішення про завантаження яких прийняті на етапах *i*, *i*+1, ..., *n*. Це визначення відображає той факт, що обмеження за вагою є єдиним, що зв'язує *n* етапів разом.

Нехай $f_i(x_i)$ – максимальний прибуток від етапів *i*, *i*+1, ..., *n* при заданому стані $x_i$. Простіше всього рекурентне рівняння визначається за допомогою наступної двохкрокової процедури.

*Крок 1.* Виразимо $f_i(x_i) = \max\{r_i m_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, де $f_{n+1}(x_{n+1}) \equiv 0$.

*Крок 2.* Виразимо $x_{i+1}$ як функцію $x_i$ для гарантії того, що ліва частина останнього рівняння є функцією лише $x_i$. За визначенням $x_i - x_{i+1}$ є вага, яка завантажена на етапі *i*, тобто $x_i - x_{i+1} = w_i m_i$ або $x_{i+1} = x_i - w_i m_i$. Отже, рекурентне рівняння набуває наступного вигляду.

$$f_i(x_i) = \max\{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

---

**Приклад 9.5.** У чотирьохтонний літак завантажують предмети трьох найменувань. Наведена таблиця 9.10 містить дані про вагу одного предмету $w_i$ (у тоннах) і прибутки $r_i$ (у тис. грн.), отримані від одного завантаженого предмету. Як необхідно завантажити літак, щоб отримати максимальний прибуток?

Таблиця 9.10

| Предмет *i* | $w_i$ | $r_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 31 |
| 2 | 3 | 47 |
| 3 | 1 | 14 |

*Розв'язання.* Так як вага одного предмету $w_i$ для всіх найменувань і максимальна вага *W* приймають цілочислові значення, стан $x_i$ може приймати лише цілочислові значення.

*Етап 3*. Точна вага, яка може бути завантажена на етапі 3 (предмет найменування 3), заздалегідь не відома, але вона повинна приймати одне із значень 1, 2, 3, 4 (так як $W = 4$ тонни). Стани $x_3 = 0$ і $x_3 = 4$ являють собою граничні випадки, коли предмети третього найменування зовсім не завантажуються або завантажують літак повністю. Інші значення $x_3$ (1, 2, 3) передбачають часткове завантаження літака предметами третього найменування.

Наступне рівняння є основою для порівняння альтернатив на третьому етапі.

$$f_3(x_3) = \max\{14 \cdot m_3\}, \ \max\{m_3\} = \left[\frac{4}{1}\right] = 4.$$

$x_3 = 0: \ f_3(x_3) = 0;$

$x_3 = 1: \ f_3(x_3) = 14;$

$x_3 = 2: \ f_3(x_3) = 28;$

$x_3 = 3: \ f_3(x_3) = 42;$

$x_3 = 4: \ f_3(x_3) = 56.$

*Етап 2*.

$$f_2(x_2) = \max\{47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\}, \ \max\{m_2\} = \left[\frac{4}{3}\right] = 1.$$

В таблиці 9.11 порівнюються допустимі розв'язки для кожного значення $x_2$.

Таблиця 9.11

| $x_2$ | $47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)$ | | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|---|---|
| | $m_2 = 0$ | $m_2 = 1$ | $f_2(x_2)$ | $m_2^*$ |
| 0 | 0+0=0 | – | 0 | 0 |
| 1 | 0+14=14 | – | 14 | 0 |
| 2 | 0+28=28 | – | 28 | 0 |
| 3 | 0+42=42 | 47+0=47 | 47 | 1 |
| 4 | 0+56=56 | 47+14=61 | 61 | 1 |

*Етап 1.*

$$f_1(x_1) = \max\{31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\},\ \max\{m_1\} = \left[\frac{4}{2}\right] = 2.$$

Таблиця 9.12

| $x_1$ | $31m_1 + f_2(x_1 - 2x_1)$ | | | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $m_1 = 0$ | $m_1 = 1$ | $m_1 = 2$ | $f_1(x_1)$ | $m_1^*$ |
| 0 | 0+0=0 | – | – | 0 | 0 |
| 1 | 0+14=14 | – | – | 14 | 0 |
| 2 | 0+28=28 | 31+0=31 | – | 31 | 1 |
| 3 | 0+47=47 | 31+14=45 | – | 47 | 0 |
| 4 | 0+61=61 | 31+28=59 | 62+0=62 | 62 | 2 |

Оптимальний розв'язок визначається тепер наступним чином. З умови $W = 4$ випливає, що перший етап розв'язування задачі при $x_1 = 4$ дає оптимальний розв'язок $m_1^* = 2$, який означає, що два предмети першого найменування будуть завантажені у літак. Це завантаження залишає $x_2 = x_1 - 2m_1^* = 4 - 2 \cdot 2 = 0$. Розв'язування на другому етапі при $x_2 = 0$ приводить до оптимального розв'язку $m_2^* = 0$, яке в свою чергу, дає $x_3 = x_2 - 3m_2^* = 0 - 3 \cdot 0 = 0$. Далі третій етап при $x_3 = 0$ приводить до $m_3^* = 0$. Отже, оптимальним розв'язком задачі є $m_1^* = 2$, $m_2^* = 0$, $m_3^* = 0$. Відповідний прибуток дорівнює 62 000 грн.

На першому етапі нам, по суті, необхідно отримати розв'язок лише для $x_1 = 4$, так як це останній етап, який підлягає розгляду. Однак значення для $x_1 = 0, 1, 2, 3$ дозволяють провести аналіз чутливості розв'язку. Наприклад, що відбудеться, якщо максимальна вантажність літака буде три тонни замість чотирьох? Новий оптимальний розв'язок може бути визначений починаючи з $x_1 = 3$ на першому етапі і продовжуючи так, як ми поступали при $x_1 = 4$.

Задача про завантаження є типовим представником задачі про розподіл ресурсів.

***Задача про будівництво і експлуатацію підприємств.***

Задача по оптимальному розміщенню виробничих підприємств також може бути зведена до задачі про розподіл ресурсів згідно з критерієм мінімізації та урахуванням умови цілочислових значень змінних.

Нехай задана потреба у продукті, який користується попитом у певному регіоні. Відомі пункти, в яких можна побудувати підприємства, які будуть випускати цей продукт. Підраховані витрати на будівництво та експлуатацію таких підприємств.

Необхідно так розмістити підприємства, щоб витрати на їх будівництво та експлуатацію були мінімальними.

Введемо позначення:

$x$ – кількість ресурсу, що розподіляється та який можна використати $n$ різними способами;

$x_i$ – кількість ресурсу, який використовується за $i$-м способом ($i = 1, 2, \ldots, n$);

$g_i(x_i)$ – функція витрат на виробництво при використанні ресурсу $x_i$ за $i$-м способом;

$f_k(x)$ – найменші витрати, які необхідно зробити при використанні ресурсу $x$ першими $k$ способами.

Необхідно мінімізувати загальну величину витрат при освоєнні ресурсу $x$ всіма способами:

$$f_n(x) = \min\left\{\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)\right\}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Економічний зміст змінних $x_i$ полягає в знаходженні кількості підприємств, яка буде рекомендована для будівництва в $i$-му пункті. Для зручності розрахунків будемо вважати, що планується будівництво підприємств однакової потужності.

Розглянемо конкретну задачу по розміщенню підприємств.

**Приклад 9.6.** У трьох районах міста підприємець планує побудувати п'ять підприємств однакової потужності по випуску хлібобулочних виробів, які користуються попитом.

Необхідно розмістити підприємства таким чином, щоб забезпечити мінімальні сумарні витрати на їх будівництво та експлуатацію. Значення функції витрат наведені у таблиці 9.13.

Таблиця 9.13

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_1(x)$ | 11 | 18 | 35 | 51 | 76 |
| $g_2(x)$ | 10 | 19 | 34 | 53 | 75 |
| $g_3(x)$ | 9 | 20 | 36 | 54 | 74 |

*Розв'язання*. У даному прикладі $g_i(x)$ – функція витрат в млн. грн., яка характеризує величину витрат на будівництво та експлуатацію в залежності від кількості розміщених підприємств в $i$-му районі;

$f_k(x)$ – найменша величина витрат в млн. грн., які необхідно зробити при будівництві та експлуатації підприємств у перших $k$ районах.

Розв'язування задачі проводимо з використанням рекурентних рівнянь:

для першого району

$$f_1(x) = \min\{g_i(x_i)\} = g_1(x),$$

для інших районів

$$f_k(x) = \min\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\},\ k = 2,3.$$

*Етап 1.* Якщо всі підприємства будувати лише в першому районі, то

$f_1(1)=g_1(1)=11$, $f_1(2)=g_1(2)=18$, $f_1(3)=g_1(3)=35$,

$f_1(4)=g_1(4)=51$, $f_1(5)=g_1(5)=76$.

Мінімальні витрати при $x=5$ складають 76 млн. грн.

*Етап 2.* Визначимо оптимальну стратегію при розміщенні підприємств в перших двох районах. Розрахунки подані у таблиці 9.14.

Таблиця 9.14

| $x$ | $g_2(x_2)+f_1(x-x_2)$ | | | | | | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_2=0$ | $x_2=1$ | $x_2=2$ | $x_2=3$ | $x_2=4$ | $x_2=5$ | $f_2(x_2)$ | $x_2^*$ |
| 1 | 0+11=11 | 10+0=10 | – | – | – | – | 10 | 1 |
| 2 | 0+18=18 | 10+11=21 | 19+0=19 | – | – | – | 18 | 0 |
| 3 | 0+35=35 | 10+18=28 | 19+11=30 | 34+0=34 | – | – | 28 | 1 |
| 4 | 0+51=51 | 10+35=45 | 19+18=37 | 34+11=45 | 53+0=53 | – | 37 | 2 |
| 5 | 0+76=76 | 10+51=61 | 19+35=54 | 34+18=52 | 53+11=64 | 75+0=75 | 52 | 3 |

*Етап 3.* Визначимо оптимальну стратегію при розміщені п'яти підприємств у трьох районах за формулою

$$f_3(x)=\min\{g_3(x_3)+f_2(x-x_3)\}.$$

Знайдемо $f_3(5)$:

$$g_3(0)+f_2(5)=0+52=52,$$

$$g_3(1)+f_2(4)=9+37=46,$$

$$g_3(2)+f_2(3)=20+28=48,$$

$$g_3(3)+f_2(2)=36+18=54,$$

$$g_3(4)+f_2(1)=54+10=64,$$

$$g_3(5)+f_2(0)=74+0=74,$$

$$f_3(5)=\min\{52,46,48,54,64,74\}=46.$$

Визначені витрати на будівництво та експлуатацію підприємств від першого до третього етапу. Повернемося від третього до першого етапу. Мінімальні витрати в 46 млн. грн. на третьому етапі отримані як 9+37, тобто 9 млн. грн. відповідають будівництву одного підприємства у третьому районі. Згідно з другим етапом 37 млн. грн. одержані як 19+18, тобто 19 млн. грн. відповідають будівництву двох підприємств у другому районі. Згідно з першим етапом 18 млн. грн. відповідають будівництву двох підприємств у першому районі.

Отже, оптимальна стратегія полягає в будівництві одного підприємства у третьому районі і по два підприємства у першому та другому районах. При цьому мінімальна вартість будівництва та експлуатації складає 46 млн. грн.

---

***Задача про планування робочої сили.***

При виконанні деяких проектів кількість робочих, необхідних для цього, регулюються шляхом їх найму та звільнення. Оскільки як наймання, так і звільнення робітників пов’язані з додатковими витратами, необхідно визначити, яким чином повинна регулюватись чисельність робітників в період реалізації проекту.

Припустимо, що проект буде виконуватись на протязі $n$ тижнів і мінімальна потреба у робочій силі на протязі $i$-го тижня складає $b_i$ робітників. При ідеальних умовах бажано на протязі $i$-го тижня мати в точності $b_i$ робітників. Однак в залежності від вартісних показників може бути більш вигідним відхилення чисельності робітників як в один, так і в інший бік від мінімальних потреб. Якщо $x_i$ – кількість працюючих на протязі $i$-го тижня, то можливі витрати двох видів: 1) $c_1\left(x_i - b_i\right)$ – витрати, пов’язані з необхідністю утримувати надлишок $x_i - b_i$ робочої сили і 2) $c_2\left(x_i - x_{i-1}\right)$ – витрати, пов’язані з необхідністю додаткового наймання $x_i - x_{i-1}$ робітників.

Елементи моделі динамічного програмування визначаються наступним чином.

1. *Етап $i$* визначається порядковим номером тижня $i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. *Варіантами розв’язку* на $i$-му етапі є значення $x_i$ – кількість працюючих на протязі $i$-го тижня.
3. *Станом* на $i$-му етапі є $x_{i-1}$ – кількість працюючих на протязі ($i$-1)-го тижня (етапу).

Рекурентне рівняння динамічного програмування представляється у вигляді

$$f_i(x_{i-1}) = \min\{c_1(x_i - b_i) + c_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\},\ i = 1,2,\ldots,n,$$

де $f_{n+1}(x_n) \equiv 0$. Обчислення починаються з етапу $n$ при $x_n = b_n$ і закінчуються на етапі 1.

---

**Приклад 9.7.** Будівельний підрядчик оцінює мінімальні потреби у робочій силі на кожен з послідовних п’яти тижнів наступним чином: 5, 7, 8, 4 і 6 робітників відповідно. Утримання надлишку робочої сили обходиться підряднику у 300 грн. за одного робітника в тиждень, а наймання робочої сили на протязі одного тижня коштує 400 грн. плюс 200 грн. за кожного робітника в тиждень.

Виражаємо $c_1$ і $c_2$ в сотнях грн. та маємо наступне:

$$b_1 = 5,\ b_2 = 7,\ b_3 = 8,\ b_4 = 4,\ b_5 = 6,$$

$$c_1(x_i - b_i) = 3(x_i - b_i),\ x_i > b_i,\ i = 1,2,\ldots,5,$$

$$c_2(x_i - x_{i-1}) = 4 + 2(x_i - x_{i-1}),\ x_i > x_{i-1},\ i = 1,2,\ldots,5.$$

*Етап 5.* $b_5 = 5$.

Таблиця 9.15

| $x_4$ | $c_1(x_5-6)+c_2(x_5-x_4)$ | Оптимальний розв’язок | |
|---|---|---|---|
| | $x_5 = 6$ | $f_5(x_4)$ | $x_5^*$ |
| 4 | 3(0)+4+2(2)=8 | 8 | 6 |
| 5 | 3(0)+4+2(1)=6 | 6 | 6 |
| 6 | 3(0)+0=0 | 0 | 6 |

*Етап 4.* $b_4 = 4$.

Таблиця 9.16

| $x_3$ | $c_1(x_4-4)+c_2(x_4-x_3)+f_5(x_4)$ | | | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_4=4$ | $x_4=5$ | $x_4=6$ | $f_4(x_3)$ | $x_4^*$ |
| 8 | 3(0)+0+8=8 | 3(1)+0+6=9 | 3(2)+0+0=6 | 6 | 6 |

*Етап 3.* $b_3=8$.

Таблиця 9.17

| $x_2$ | $c_1(x_3-8)+c_2(x_3-x_2)+f_4(x_3)$ | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|---|
| | $x_3=8$ | $f_3(x_2)$ | $x_3^*$ |
| 7 | 3(0)+4+2(1)+6=12 | 12 | 8 |
| 8 | 3(0)+0+6=6 | 6 | 8 |

*Етап 2.* $b_2=7$.

Таблиця 9.18

| $x_1$ | $c_1(x_2-7)+c_2(x_3-x_2)+f_3(x_2)$ | | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|---|---|
| | $x_2=7$ | $x_2=8$ | $f_2(x_1)$ | $x_2^*$ |
| 5 | 3(0)+4+2(2)+12=20 | 3(1)+4+2(3)+6=19 | 19 | 8 |
| 6 | 3(0)+4+2(1)+12=18 | 3(1)+4+2(2)+6=17 | 17 | 8 |
| 7 | 3(0)+0+12=12 | 3(1)+4+2(1)+6=15 | 12 | 7 |
| 8 | 3(0)+0+12=12 | 3(1)+0+6=9 | 9 | 8 |

*Етап 1.* $b_1=5$.

Таблиця 9.19

| $x_0$ | $c_1(x_1-5)+c_2(x_1-x_0)+f_2(x_1)$ | | | | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1=5$ | $x_1=6$ | $x_1=7$ | $x_1=8$ | $f_1(x_0)$ | $x_1^*$ |
| 0 | 3(0)+4+ 2(5)+19=33 | 3(1)+4+ 2(6)+17=36 | 3(2)+4+ 2(7)+12=36 | 3(2)+4+ 2(8)+9=35 | 33 | 5 |

Оптимальний розв'язок визначається послідовно наступним чином.

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1^* = 5 \rightarrow x_2^* = 8 \rightarrow x_3^* = 8 \rightarrow x_4^* = 6 \rightarrow x_5^* = 6.$$

Отриманому розв’язку відповідає план поданий у таблиці 9.20

Таблиця 9.20

| Номер тижня ($i$) | Мінімум робочої сили ($b_i$) | Кількість фактично працюючих ($x_i$) | Розв’язок |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | Найняти 5 робітників |
| 2 | 7 | 8 | Найняти 3 робітника |
| 3 | 8 | 8 | Нічого не міняти |
| 4 | 4 | 6 | Звільнити 2 робітників |
| 5 | 6 | 6 | Нічого не міняти |

## 1.3. Детерміновані моделі управління запасами

Як у бізнесі, так й у виробництві звичайно прийнято підтримувати розумний запас матеріальних ресурсів або комплектуючих для забезпечення безперервності виробничого процесу. Традиційно запас розглядається як неминучі витрати, коли занадто низький рівень запасу призводить до дорогоцінних зупинок виробництва, а занадто високий до „омертвіння” капіталу. Задача управління запасами визначає рівень запасу, який урівноважує два розглянутих граничних випадки.

Важливим фактором, який визначає формулювання та розв’язання задачі управління запасами, є те, що об’єм попиту на запас, який зберігається (в одиницю часу) може бути або *детермінованим* (достовірно відомим), або *стохастичним* (описаним імовірнісним розподілом). У цьому розділі розглядаються детерміновані моделі управління запасами.

### *Узагальнена модель управління запасами.*

Природа задачі управління запасами визначається неодноразовим розміщенням та отриманням замовлень заданих об’ємів продукції (у подальшому – запаси, які зберігаються) у певні моменти часу. З цієї точки зору **стратегія управління запасами** повинна давати відповідь на наступні два питання:

1. Яку кількість запасу, який зберігається, замовляти?
2. Коли замовляти?

Відповідь на перше питання визначає *економічний розмір замовлення* шляхом мінімізації наступної функції витрат:

$$\begin{pmatrix} \text{Ñóìàðí³ âèòðàòè ñèñòåìè} \\ \text{óïðàâë³ííÿ çàïàñàìè} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Âèòðàòè íà} \\ \text{ïðèäáàííÿ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Îðãàí³çàö³éí³} \\ \text{âèòðàòè} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \text{Âèòðàòè íà} \\ \text{çáåð³ãàííÿ çàïàñó} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Âèòðàòè â³ä} \\ \text{äåô³öèòó çàïàñó} \end{pmatrix}.$$

Всі ці вартості повинні бути виражені як функції шуканого об'єму замовлення та інтервалу часу між замовленнями.

1. *Витрати на придбання* визначаються вартістю одиниці продукції (запасу, який зберігається). Ця вартість може бути сталою або із скидкою, яка залежить від об'єму замовлення.
2. *Організаційні витрати* являють собою сталі витрати, які пов'язані з оформленням та доставкою продукції. Найчастіше ці витрати не залежать від об'єму замовлення.
3. *Витрати на зберігання запасу* являють собою витрати, які пов'язані із зберіганням на складі. Цей вид витрат містить як відсоток на інвестиційний капітал, так і вартість збереження, утримання і догляду.
4. *Витрати від дефіциту запасу* – це витрати, які обумовлені відсутністю запасу необхідної продукції. Вони містять як потенційні витрати прибутку, так і більш суб'єктивну вартість, яка пов'язана з втратою довіри клієнтів.

Відповідь на друге питання (коли замовляти?) залежить від типу системи управління запасами, яка розглядається. Якщо система передбачає **періодичний контроль** стану запасу (наприклад, щотижневий, або щомісячний), момент надходження нового замовлення співпадає з початком періоду. Якщо ж в системі передбачений **неперервний контроль** стану запасу, нові замовлення розміщуються тоді, коли рівень запасу опускається до заздалегідь визначеного значення, яке називається **точкою поновлення замовлення**.

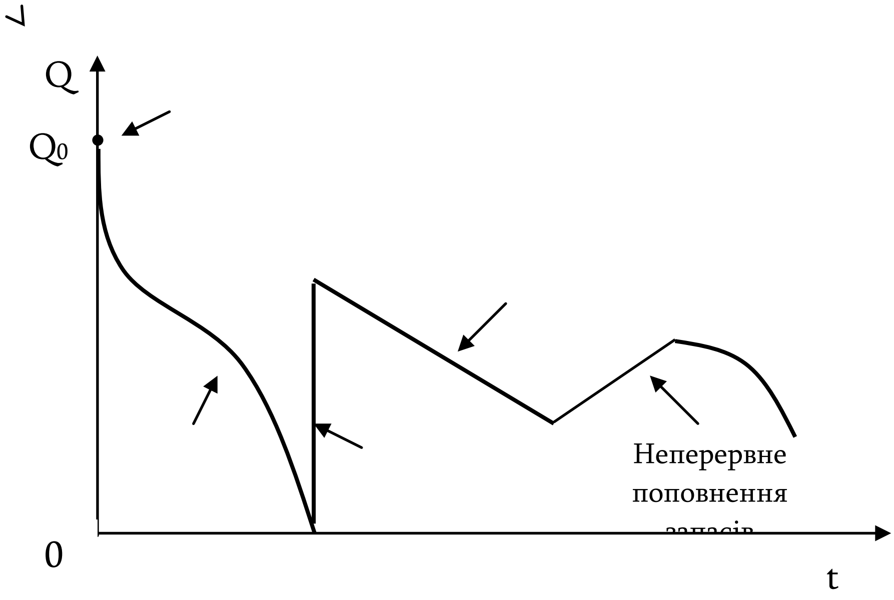



Рис. 9.4

Моделі управління запасами охоплюють два типи детермінованих моделей: *статичні* та *динамічні.* В статичних моделях розглядаються ситуації, коли об'єм попиту на продукцію, яка зберігається (запас), є сталим у часі. В динамічних моделях об'єм попиту є функцією часу. На рис. 9.4. подані можливі графіки зміни запасу $Q$, який є на складі, у часі $t$.

***Класична задача економічного розміру замовлення.***

Найпростіші моделі управління запасами характеризуються сталим у часі попитом, миттєвим поповненням запасу та відсутністю дефіциту.

Введемо позначення:

$q$ – об'єм замовлення (кількість одиниць продукції);

$v$ – інтенсивність попиту (вимірюються в одиницях продукції на одиницю часу);

$b$ – організаційні витрати (сталі витрати, які не залежать від розміру замовлення, вимірюються у грошових одиницях);

$S$ – вартість продукції (розглядається один вид продукції, ціна одиниці якої стала);

$h$ – витрати на зберігання (витрати на одиницю продукції, яка зберігається, в одиницю часу);

$t_0$ – тривалість циклу замовлення (вимірюється у часових одиницях).

Рівень запасу змінюється у відповідності з функцією, яка зображена на рис. 9.5. Замовлення об'єму $q$ розміщується та поповнюється миттєво, коли рівень запасу дорівнює нулю. Потім запас рівномірно витрачається з сталою інтенсивністю попиту $v$.

Тривалість циклу замовлення для цього прикладу дорівнює

$$t_0 = \frac{q}{v}.$$

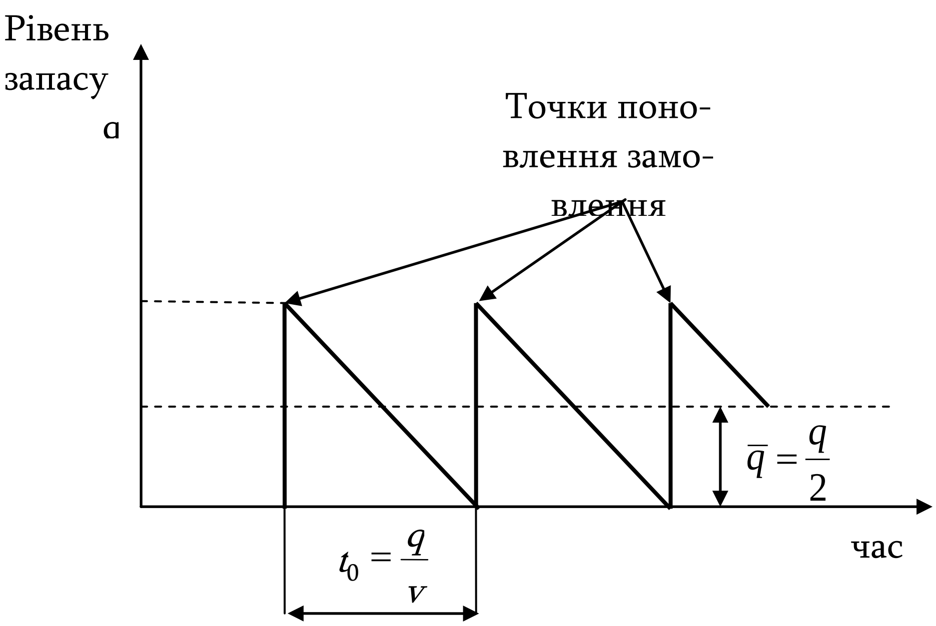



Рис. 9.5

Середній рівень запасу визначається співвідношенням

$$\bar{q} = \frac{q}{2}\ .$$

Сумарні витрати *в одиницю часу* можна представити як функцію від $q$ у наступному вигляді

$$C(q) = \frac{b + Svt_0 + h\left(\frac{q}{2}\right)t_0}{t_0} = \frac{b}{t_0} + Sv + \frac{hq}{2} = \frac{bv}{q} + Sv + \frac{hq}{2} = c_1 + c_2 + c_3\,,$$

де $c_1$ – організаційні витрати в одиницю часу;

$c_2$ – вартість замовленої продукції в одиницю часу;

$c_3$ – витрати на зберігання запасу в одиницю часу.

Оптимальне значення об’єму замовлення $q$ визначається шляхом мінімізації по $q$ функції $c(q)$.

Припускаючи, що $q$ є неперервною змінною, отримуємо необхідну умову мінімуму

$$\frac{dc(q)}{dq} = -\frac{bv}{q^2} + \frac{h}{2} = 0\,.$$

Вказана умова є також й достатньою, так як функція $c(q)$ опукла. Розв’язок даного рівняння визначає економічний об’єм замовлення

$$q^* = \sqrt{\frac{2bv}{h}}\,.$$

Отже, оптимальна стратегія управління запасами розглянутої моделі формулюється наступним чином: замовляти $q^* = \sqrt{\frac{2bv}{h}}$ одиниць продукції через кожні $t_0^* = \frac{q^*}{v}$ одиниць часу.

В дійсності поповнення запасу не може відбуватися миттєво у момент розміщення замовлення, як передбачалось раніше. Для більшості реальних ситуацій існує **термін виконання** замовлення $L$ (часове запізнення) від моменту його розміщення до реальної поставки, як показано на рис. 9.6. У цьому випадку точка поновлення замовлення має місце, коли рівень запасу знижується до $L \cdot v$ одиниць.

На рис. 9.6 показано зміну рівня запасу в часі у припущені, що термін виконання замовлення $L$ менше тривалості циклу замовлення $t_0^*$, що у загальному випадку виконується не завжди. У протилежному випадку ($L > t_0^*$) визначається *ефективний* термін $L_e$ виконання замовлення у вигляді

$$L_e = L - nt_0^*,$$

де $n$ - найбільше натуральне число, що не перевищує $\frac{L}{t_0^*}$, тобто $n = \left[\frac{L}{t_0^*}\right]$ – ціла частина числа. Таке рішення виправдано тим, що після $n$ циклів (тривалістю $t_0^*$ кожний) ситуація управління запасами стає такою, якщо б інтервал між розміщенням одного замовлення та отриманням другого дорівнював $L_e$.

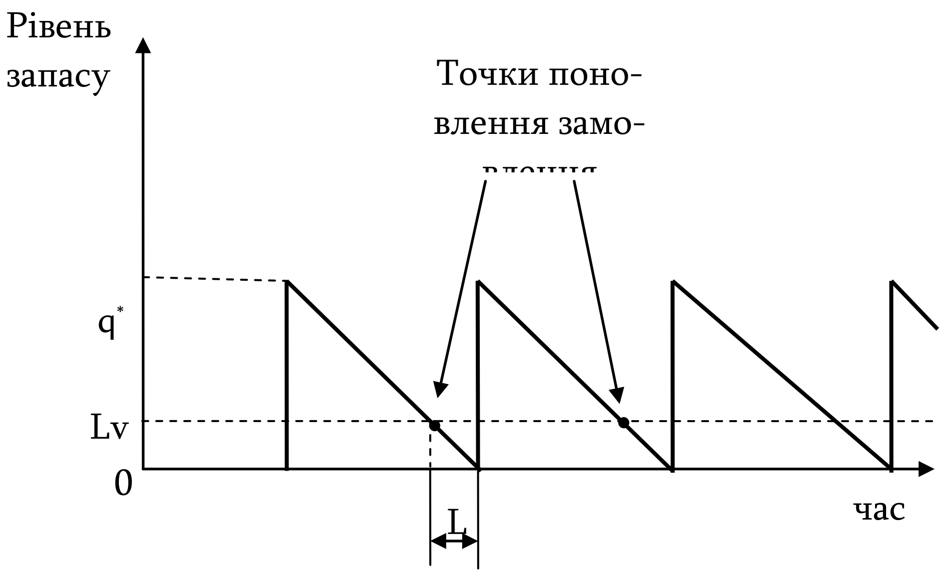



Рис. 9.6

Отже, точка поновлення замовлення має місце при рівні запасу $L_e v$ одиниць продукції, та стратегія управління запасами може бути сформульована наступним чином:

замовляти $q^*$ одиниць продукції, як тільки рівень запасу знизиться до $L_e v$ одиниць.

---

**Приклад 9.8.** Неонові лампи замовляються на оптовому складі з інтенсивністю 100 шт. на добу. Адміністрація складу замовляє ці лампи з певною періодичністю. Вартість розміщення замовлення на закупівлю ламп складає 100 у.г.о. Вартість зберігання однієї лампи на складі оцінюється в 0,02 у.г.о. на добу. Термін виконання замовлення від моменту його розміщення до реальної поставки дорівнює 12 діб. Треба визначити оптимальну стратегію замовлення неонових ламп.

*Розв'язання.*

На основі наведених даних маємо наступне:

$v$ = 100 одиниць на добу

$b$ = 100 у.г.о. за замовлення

$h$ = 0,02 у.г.о. за зберігання однієї лампи на добу

$L$ = 12 діб.

Отже,

$$q^* = \sqrt{\frac{2bv}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 100}{0,02}} = 1000\,(\textit{ламп})$$

Відповідна тривалість циклу складає

$$t_0^* = \frac{q^*}{v} = \frac{1000}{100} = 10\,(\textit{ä³á}).$$

Так як термін виконання замовлення $L$ = 12 діб перебільшує тривалість циклу $t_0^* = 10$ *ä³á*, необхідно обчислити $L_e$.

$$n = \left[\frac{L}{t_0^*}\right] = \left[\frac{12}{10}\right] = [1,2] = 1.$$

Отже,

$$L_e = L - nt_0^* = 12 - 1 \cdot 10 = 2(\textit{äîáè}\ ).$$

Тому точка поновлення замовлення має місце при рівні запасу

$$L_e v = 2 \cdot 100 = 200(\textit{ëàìï}\ ).$$

Оптимальна стратегія замовлення неонових ламп може бути сформульована наступним чином: замовляти 1000 ламп, як тільки рівень їх запасу зменшується до 200 одиниць.

Добові витрати, які пов'язані із збереженням запасу у відповідності з оптимальною стратегією, дорівнюють

$$C(q^{*}) = \frac{bv}{q} + \frac{hq}{2} = \frac{100 \cdot 100}{1000} + \frac{0{,}02 \cdot 1000}{2} = 20(\textit{ó.ã.î}.)$$

---

### *Задача економічного розміщення замовлення з розривами цін.*

Представлена у цьому підрозділі модель управління запасами відрізняється від розглянутої у попередньому підрозділі 1.2 тим, що продукція може бути придбана зі знижкою, якщо об'єм замовлення $q$ перевищує деякий фіксований рівень $y$. Таким чином, ціна одиниці продукції $S$ визначається як

$$S = \begin{cases} S_1, \text{ якщо } q \le y, \\ S_2, \text{ якщо } q > y, \end{cases}$$

де $S_1 > S_2$.

Отже, витрати на придбання продукції в одиницю часу дорівнює

$$c_2 = \begin{cases} \dfrac{S_1 q}{t_0} = vS_1, \; q \le y \\ \dfrac{S_2 q}{t_0} = vS_2, \; q > y \end{cases}.$$

Запишемо загальні витрати в одиницю часу наступним чином:

$$C(q) = \begin{cases} C_1(q) = vS_1 + \dfrac{bv}{q} + \dfrac{hq}{2} \\ C_2(q) = vS_2 + \dfrac{bv}{q} + \dfrac{hq}{2} \end{cases}.$$

Графіки функцій $C_1(q)$ та $C_2(q)$ подані на рис.9.7. Так як значення цих функцій відрізняються тільки на сталу величину $v(S_1 - S_2)$, то точки їх мінімуму співпадають та знаходься у точці

$$q_m = \sqrt{\frac{2bv}{h}}$$

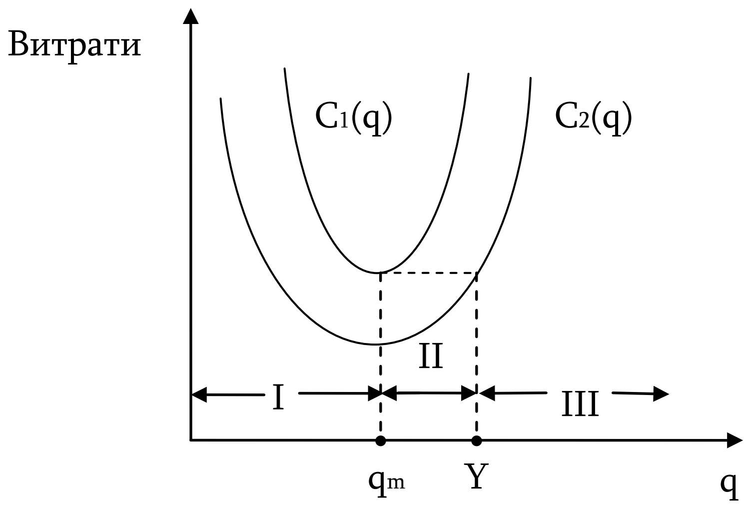



Рис. 9.7

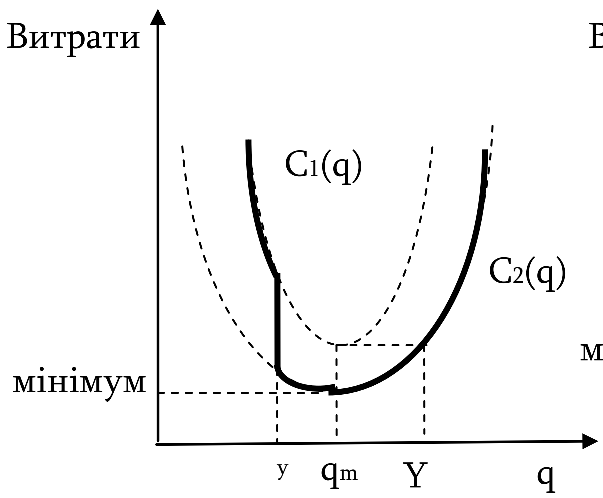
Графік функції витрат $C(q)$, якщо йти від менших значень аргументу $q$, співпадає з графіком функції $C_1(q)$ до точки $q = y$, в якій змінюється ціна продукції, а потім співпадає з графіком функції $C_2(q)$. Рис.9.7 показує, що визначення оптимального об'єму замовлення $q^*$ залежить від того, де знаходиться точка розриву ціни $y$ по відношенню до $q_m$ (вказаним на рис.9.7 областям I, II, та III, які визначені як інтервали $[0, q_m)$, $[q_m, Y)$ та $[Y, \infty)$ відповідно).

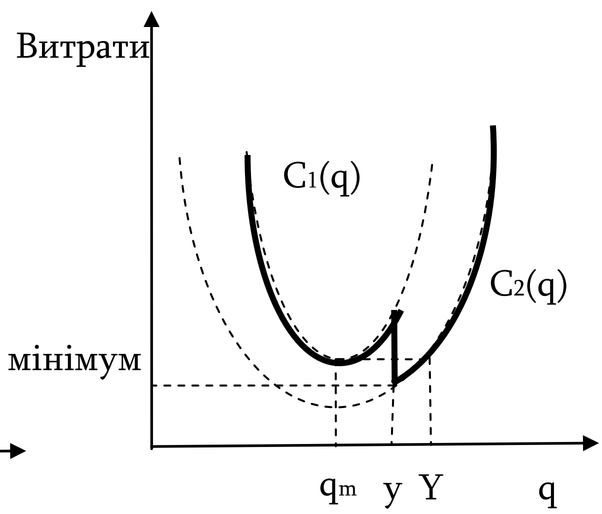
Величина $Y > q_m$ визначається з рівняння

$$c_2(Y) = c_1(q_m).$$

Рис. 9.8 показує, як визначається оптимальне значення $q^*$:

$$q^* = \begin{cases} q_m, & \text{ÿêùî ó çíàõîäèòüñÿ â îáëàñò³ ² àáî ²²²} \\ ó, & \text{ÿêùî ó çíàõîäèòüñÿ â îáëàñò³ ²²} \end{cases}.$$



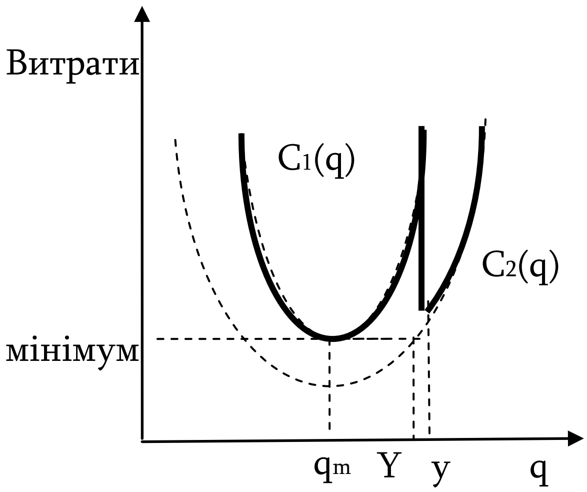

Випадок 1: $y$ в області I,

$q^* = q_m$

Випадок 2: $y$ в області II,

$q^* = y$

Випадок 3: $y$ в області III,




$q^* = q_m$

Рис. 9.8

**Приклад 9.9.** Фірма, яка виготовляє деякий виріб, закуповує у великій кількості основну сировину по 3 у.г.о. за 1 кг. Ціна може бути знижена до 2,5 у.г.о. за 1 кг при умові, що фірма закуповує більше 1000 кг. За день виготовляється біля 150 виробів, і на кожен з них треба 1,25 кг сировини. На складі зберігаються великі об'єми сировини, що коштує 0,02 у.г.о. в день за 1 кг. Вартість розміщення замовлення на великий об'єм сировини складає 20 у.г.о. Термін виконання замовлення дорівнює 2 дні. Треба визначити оптимальну стратегію управління запасами.

*Розв'язання.*

Витрати сировини за один день складають

$$v = 150 \cdot 1{,}25 = 187{,}5 (\hat{e}\tilde{a} / \ddot{a}\mathring{a}\acute{\imath}\ddot{u}).$$

Також маємо

$h$ = 0,02 у.г.о./(кг·день)

$b$ = 20 у.г.о

$L$ = 2 дні

$S_1$ = 3 у.г.о./кг

$S_2$ = 2,50 у.г.о./кг

$y$ = 1000 кг

*Крок 1.* Обчислюємо

$$q_m = \sqrt{\frac{2bv}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 187{,}5}{0{,}02}} = 612{,}37 (\hat{e}\tilde{a})$$

Так, як $y = 1000$ більше $q_m = 612{,}37$, переходимо до кроку 2.

*Крок 2.* Знаходимо $Y$ з рівняння

$$c_2(Y) = c_1(q_m)$$

$$S_2 v + \frac{bv}{Y} + \frac{hY}{2} = S_1 v + \frac{bv}{q_m} + \frac{hq_m}{2}$$

$$2{,}5 \cdot 187{,}5 + \frac{20 \cdot 187{,}5}{Y} + \frac{0{,}02Y}{2} = 3 \cdot 187{,}5 + \frac{20 \cdot 187{,}5}{612{,}37} + \frac{0{,}02 \cdot 612{,}37}{2}$$

Після спрощення маємо

$$0{,}01Y^2 - 106Y + 3750 = 0$$

Розв'язком цього рівняння при виконанні умови $Y > q_m$ буде $Y = 10564{,}5$, що більше $q_m$.

Отже, область II: $[612{,}37; 10564{,}5]$,

область III: $[10564{,}5; \infty]$.

Так як $q = 1000$ знаходиться в області II, то оптимальний об'єм замовлення дорівнює

$$q^* = y = 1000\,кг\,.$$

При заданому терміну виконання замовлення в 2 дні точкою поновлення замовлення є

$$2v = 2 \cdot 187{,}5 = 375\,\hat{e}\tilde{a}\,.$$

Отже, оптимальна стратегія управління запасами формулюється таким чином: замовляти 1000 кг сировини, коли рівень запасу зменшується до 375 кг.

---

### ***Модель виробничих постачань.***

В класичній моделі передбачалось, що надходження продукції на склад відбувається або миттєво або з деяким терміном запізнення відразу всього об'єму замовлення. Розглянемо випадок, коли продукція надходить на склад безпосередньо з виробничої лінії. Вважається, що надходження продукції відбувається неперервно. Модель задачі у цьому випадку називається моделлю *виробничих постачань*. Позначимо через $p$ швидкість надходження продукції на склад. Ця величина дорівнює кількості товарів за одиницю часу.

Потрібно визначити оптимальний розмір продукції, який мінімізує загальні витрати.

Графік змін моделі виробничих постачань поданий на рис.9.9.

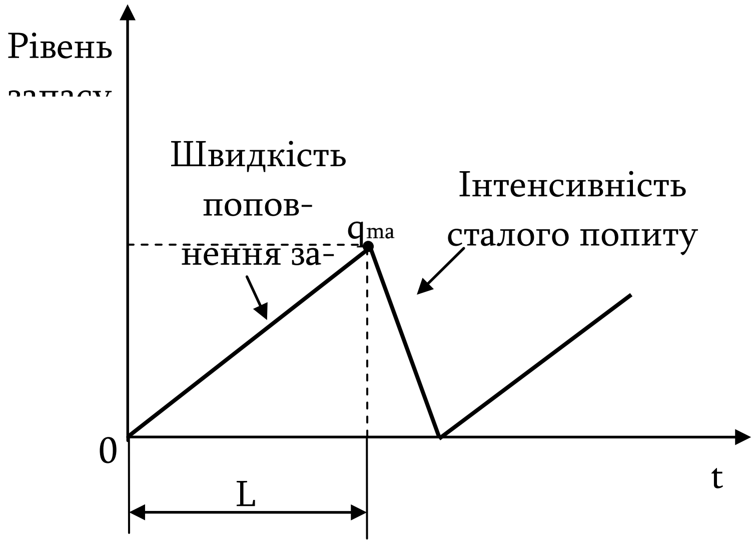



Рис. 9.9

Загальні витрати за одиницю часу, як і для загальної задачі, складають

$$c = c_1 + c_2 + c_3$$

$$c_1 = \frac{bv}{q},\ c_2 = Sv.$$

Для отримання середнього рівня запасів треба врахувати, що максимальний рівень запасів

$$q_{\max} = (p - v)L,$$

а $q = pL$ - кількість продукції, що постачається за один виробничий цикл.

Тоді середній рівень запасів складає половину максимального та дорівнює

$$\overline{q} = \frac{q_{\max}}{2} = \frac{(p-v)L}{2} = \frac{(p-v)q}{2p}$$

($L = \dfrac{q}{p}$ - тривалість постачання).

Отже,

$$c = \frac{bv}{q} + Sv + \frac{(p-v)h}{2p}q$$

Знаходячи розв'язок рівняння

$$\frac{dc}{dq} = 0,$$

отримуємо оптимальний розмір партії моделі виробничих постачань:

$$q_{\text{îïò}} = \sqrt{\frac{2pbv}{(p-v)h}}.$$

---

**Приклад 9.10.** Інтенсивність рівномірного попиту на телевізори, які випускаються фірмою, складає 2000 шт. у рік. Організаційні витрати дорівнюють 20 тис. грн. Ціна телевізора складає 1 тис. грн., витрати на зберігання дорівнюють 0,1 тис. грн. у розрахунку на один телевізор на рік. Запаси на складі поповнюються з швидкістю 4000 телевізорів у рік. Виробнича лінія починає діяти, як тільки рівень запасів на складі стає рівним нулю, продовжує працювати доти, доки не буде виготовлено $q$ телевізорів.

Знайти розмір партії, яка мінімізує всі витрати. Визначити кількість постачань на протязі року, час тривалості постачання, тривалість циклу, максимальний рівень запасів при умові, що розмір партії оптимальний.

*Розв'язання.*

Дана модель задачі є моделлю виробничих постачань з наступними параметрами:

$v$ = 2000 шт/рік; $b$ = 20 тис.грн.; $h$ = 0,1 тис.грн./(шт.·рік.);

$S$ = 1 тис.грн./шт; $p$ = 4000 шт/рік.

Графік зміни запасів поданий на рис. 9.10.

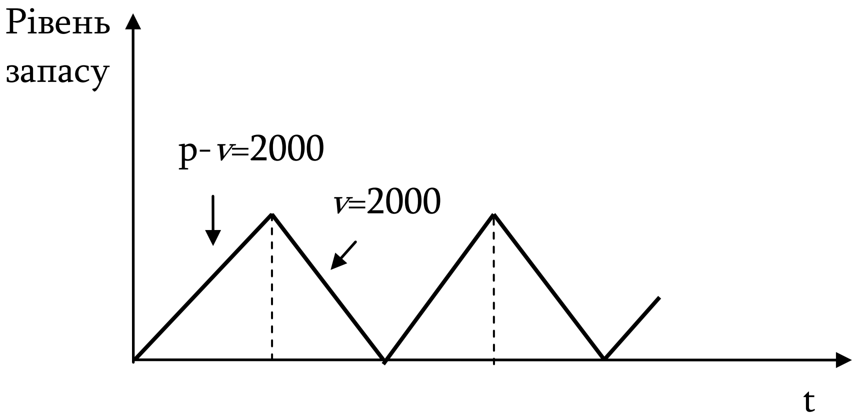



Рис.9.10

Максимальний рівень запасів:

$$q_{\max} = \frac{(p-v)q}{p} = \frac{2000 \cdot q}{4000} = \frac{q}{2}$$

Середній рівень запасів:

$$\overline{q} = \frac{q_{\max}}{2} = \frac{q}{4}$$

$$q_{\text{îïò}} = \sqrt{\frac{2pbv}{(p-d)h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4000 \cdot 20 \cdot 2000}{2000 \cdot 0{,}1}} = 1265.$$

Знайдемо оптимальні об'єми постачань, тривалість постачання, тривалість циклу.

Кількість партій за рік:

$$n = \frac{v}{q} = \frac{2000}{1265} \approx 1{,}6.$$

Тривалість постачання:

$$L = \frac{q}{p} = \frac{1265}{4000} = 0{,}31625(\text{ðîê³â}) \approx 115(\text{äí³â}).$$

Тривалість циклу:

$$t_0 = \frac{1}{n} = \frac{365}{1{,}6} \approx 230(\text{днів}).$$

Отже, оптимальна стратегія управління запасами полягає в наступному.

Отримувати на склад 1265 телевізорів на протязі 115 днів. Тривалість циклу – 230 днів, а кількість постачань на протязі року – 1,6.

## 1.4. Загальна постановка задачі динамічного програмування. Принцип оптимальності

Метод динамічного програмування є дуже потужним методом оптимізації управління, який здатний розв'язувати задачі не зважаючи на цілочисловий розв'язок, нелінійність цільової функції, вид обмежень. Але на відміну від лінійного програмування динамічне програмування не зводиться до якої-небудь стандартної обчислювальної процедури; воно може бути передано на комп'ютер тільки після того, як записані відповідні формули, а це часто буває не так легко.

Перше питання, на яке треба дати відповідь: якими параметрами характеризується стан системи, яка підлягає керуванню. Від вдалого знаходження набору цих параметрів часто залежить можливість успішно розв'язати задачу оптимізації. Якщо, як це звичайно і буває, стан системи описується багатьма параметрами, то стає важко перед кожним кроком перебрати всі їх варіанти і для кожного знайти оптимальну умову керування. Останнє ще більш ускладнюється у випадку, коли кількість можливих варіантів керування велика. У цих випадках над особою, що приймає рішення, повисає „прокляття багатовимірності Р. Беллмана". Тому дуже важливо вміти правильно поставити задачу, не переобтяжувати її зайвими деталями. Так що у методі динамічного програмування багато залежить від мистецтва і досвіду дослідника.

Друга задача після опису системи – це поділ на етапи (кроки). Іноді він буває заданий у самій постановці задачі , але часто поділ на кроки приходиться вводити штучно. При постановці задачі динамічного програмування , зокрема при виборі способу поділу на кроки, повинні бути враховані всі розумні обмеження, які накладаються на управління. Кількість кроків необхідно обирати з урахуванням двох обставин:

1) крок повинен бути достатньо дрібним для того, щоб процедура оптимізації крокового управління була достатньо простою;
2) крок повинен бути не надто дрібним, щоб не виконувати зайвих розрахунків, які тільки ускладнюють процедуру пошуку оптимального розв'язку, а не приводять до суттєвого покращення оптимуму цільової функції.

У будь-якому випадку практики нас цікавить не строго оптимальний, а „припустимий" розв'язок, який не сильно відрізняється від оптимального за значенням цільової функції.

Основу методу динамічного програмування становить так званий принцип оптимальності Беллмана, який можна сформулювати так.

**Принцип оптимальності.** *На кожному етапі оптимальна стратегія визначається незалежно від стратегій, які застосовані на попередніх етапах.*

Застосування принципу оптимальності демонструється всіма обчисленнями з наведених у попередньому параграфі прикладів. Ми використовували на кожному наступному етапі оптимальні розв'язки, отримані на попередньому етапі і не цікавились, як останні були досягнуті.

Сформулюємо декілька практичних рекомендацій щодо постановки задач динамічного програмування. Цю постановку зручно проводити у наступному порядку.

1. Вибрати параметри, які характеризують стан $S$ системи перед кожним кроком.
2. Поділити операцію на етапи (кроки).
3. З'ясувати набір крокових управлінь $x_i$ для кожного кроку і обмеження, які на них накладаються.
4. Визначити, яке значення цільовій функції приносить на $i$-му кроці управління $x_i$, якщо перед цим система була у стані $S$, тобто записати цільові функції : $z_i = f_i(S, x_i)$.

5. Визначити, як зміниться стан $S$ під впливом управління $x_i$ на $i$-му кроці: воно переходить у новий стан
$$S' = \varphi_i(S, x_i). \tag{9.1}$$
6. Записати основне рекурентне рівняння динамічного програмування, яке виражає умовне оптимальне значення цільової функції $Z_i(S)$ (починаючи з $i$-го кроку і до кінця) через вже відоме значення $Z_{i+1}(S)$:
$$Z_i(S) = \max\{f_i(S, x_i) + Z_{i+1}(\varphi_i(S, x_i))\}. \tag{9.2}$$
Цьому значенню цільової функції відповідає умовне оптимальне управління на $i$-му кроці $x_i(S)$ (підкреслимо, що у вже відому функцію $Z_{i+1}(S)$ треба замість $S$ підставити змінений стан $S' = \varphi_i(S, x_i)$).
7. Виконати умовну оптимізацію останнього ($m$-го) кроку, вибравши з усієї гамми станів $S$, з яких можна за один крок дійти до кінцевого стану; при цьому для кожного з них обчислюється цільова функція за формулою
$$Z_m(S) = \max\{f_m(S, x_m)\}$$
і знаходиться умовне оптимальне управління $x_m(S)$, для якого цей максимум досягається.
8. Виконати умовну оптимізацію ($m-1$)-го, ($m-2$)-го і т. д. кроків за формулою (9.2), приймаючи в ній $i = (m-1), (m-2), \ldots$, і для кожного з кроків вказати умовне оптимальне управління $x_i(S)$, при якому максимум досягається.
9. Виконати безумовну оптимізацію управління, розглядаючи відповідні рекомендації на кожному кроці. Взяти знайдене оптимальне керування на першому кроці $x_1^* = x_1(S_0)$; змінити стан системи за формулою (9.1); для щойно знайденого стану знайти оптимальне керування на другому кроці $x_2^*$ і т. д. до кінця.

До сих пір ми розглядали тільки адитивні задачі динамічного програмування, в яких цільова функція за всю операцію дорівнювала сумі цільових функцій на окремих етапах. Але метод динамічного програмування застосовується і до задач із так званим „мультиплікативним” критерієм, який має вигляд добутку:

$$Z = z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_m = \prod_{i=1}^{m} z_i$$

(якщо тільки показники ефективності $z_i$ додатні). Ці задачі розв’язуються таким же чином, як і задачі з адитивним критерієм, з тією єдиною різницею, що в основному рівнянні (9.2) замість знаку „плюс” ставиться знак множення:

$$Z_i(S) = \max\{f_i(S, x_i) \cdot Z_{i+1}(\varphi_i(S, x_i))\}.$$

На практиці зустрічаються випадки, коли планувати операцію доводиться не на чітко визначений термін, а на невизначений тривалий проміжок часу, і нас може цікавити розв’язок задачі оптимального управління, якщо не відомо на якому кроці операція завершується. В таких випадках буває зручно розглянути в якості моделі явища нескінченно-кроковий процес управління, для якого не існує „особливого”, по відношенню до інших, останнього кроку (всі кроки рівноправні).

## Питання для самоконтролю

1. Які характерні особливості задач динамічного програмування?
2. Які рівняння покладені в основу методу динамічного програмування?
3. Методи прямої і зворотної прогонки.
4. Назвіть основні елементи моделей динамічного програмування.
5. Наведіть приклади задач динамічного програмування, які можуть бути зведені до задачі розподілу ресурсів. Які типи задач динамічного програмування Ви знаєте?
6. Зміст принципу оптимальності Белмана.
7. Алгоритм розв’язування задач динамічного програмування.
8. Мультиплікативні задачі динамічного програмування.

## Вправи

9.1. Знайти найкоротший маршрут між містами 1 і 7 на сітці доріг, яка представлена на рис. 9.11. Визначити етапи і стани системи за допомогою алгоритму зворотної прогонки, а потім розв'язати задачу.

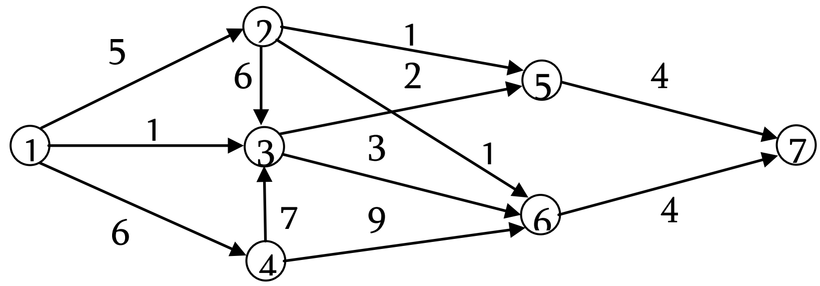



Рис. 9.11

9.2. На початок періоду, що розглядається, на підприємстві встановлено нове обладнання. Залежність продуктивності цього обладнання від періоду його роботи, а також витрати на утримання і ремонт при різному терміні його використання наведені у таблиці 9.21.

Таблиця 9.21

| Найменування | Час, на протязі якого використовується обладнання, роки | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Річний випуск продукції, тис. грн. | 80 | 75 | 65 | 60 | 60 | 55 |
| Щорічні витрати на утримання і ремонт обладнання, тис. грн. | 20 | 25 | 30 | 35 | 45 | 55 |

Відомо, що витрати, які пов'язані з придбанням і встановленням нового обладнання, ідентичного встановленому, складає 40 тис. грн., а обладнання, яке замінюється, списується. Скласти такий план заміни обладнання на протязі п'яти років, при якому загальний прибуток за даний період часу максимальний.

9.3. Група фермерів володіє трактором, термін експлуатації якого два роки, і планує розробити стратегію його заміни на наступні п'ять років. Трактор повинен експлуатуватись не менше двох і не більше п'яти років. На даний час трактор коштує 40 000 у. г. о., і ця ціна за рік збільшується на 10%. Поточна річна вартість експлуатації трактора складає 1300 у. г. о. і, як очікується, буде збільшуватись на 10% у рік. Сформулюйте задачу у вигляді задачі про найкоротший шлях, побудуйте відповідне рекурентне рівняння і визначте оптимальну стратегію заміни трактора на наступні п'ять років.

9.4. На початок періоду, що аналізується, на підприємстві встановлено нове обладнання. Визначити оптимальний цикл заміни обладнання при наступних вихідних даних:

купована ціна обладнання складає 12 у. г. о.;

залишкова вартість обладнання дорівнює нулю $s(t)=0$;

$f_n(t)=r(t)-u(t)$ – максимальний прибуток, який отримується від обладнання при умові оптимальної стратегії, де $r(t)$ – вартість продукції, яка випускається за рік на одиниці обладнання віком $t$ років, $u(t)$ – щорічні витрати на обслуговування обладнання віком $t$ років;

$n=8$ років.

Залежність $f_n(t)$ від $n$ задана у таблиці 9.22.

Таблиця 9.22

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 12 | 11 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 | 0 |

9.5. Торгівельна фірма має в розпорядженні п'ять автокрамниць, які можуть бути направлені у вихідний день в три населених пункти. Вважається, що товарообіг фірми залежить лише від кількості і асортименту товарів та визначається кількістю надісланих у той чи інший населений пункт машин. Середнє значення товарообігу у тис. грн. в кожному з населених пунктів задано у таблиці 9.23.

Таблиця 9.23

| Кількість автокрамниць | Товарообіг в населених пунктах | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 15 | 12 | 18 |
| 2 | 24 | 20 | 23 |
| 3 | 30 | 31 | 29 |
| 4 | 37 | 38 | 36 |
| 5 | 41 | 42 | 39 |

Знайти оптимальну стратегію фірми у розподілі автокрамниць по населеним пунктам, яка максимізує загальний товарообіг.

9.6. Деякий інвестор з початковим капіталом у 10 000 у. г. о. повинен вирішити в кінці кожного року, скільки коштів витратити і скільки інвестувати. Кожна одиниця інвестованого капіталу повертає $\alpha = 1{,}09$ одиниць в кінці року. Витрачені $y$ одиниць коштів на протязі кожного року приносять задоволення, яке визначається кількісно як еквівалент отримання $g(y) = \sqrt{y}$ у. г. о. Розв'яжіть задачу за допомогою методів динамічного програмування для періоду в $n = 5$ років.

9.7. Фермер має $k$ овець. На кінець кожного року він приймає рішення, скільки овець продати і скільки залишити. Прибуток від продажі однієї вівці в $i$-рік складає $p_i$. Кількість овець на кінець $i$-року подвоюється до кінця ($i$+1)-року. Фермер планує в кінці $n$-го року повністю продати овець. Складіть рекурентне рівняння для розв’язування задачі і знайдіть розв’язок при наступних даних: $n = 3$ роки, $k = 2$ вівці, $p_1 = 100$ грн., $p_2 = 130$ грн., $p_3 = 120$ грн.

9.8. В таблиці 9.24 вказаний можливий приріст випуску продукції чотирма плодово-консервними заводами області при інвестуванні їх модернізації з дискретністю 10 млн. грн., причому на один завод можна здійснити лише одну інвестицію. Скласти план розподілу інвестицій між заводами області, який максимізує загальний приріст випуску продукції.

Таблиця 9.24

| Інвестиції, млн. грн. | Приріст випуску продукції, млн. грн. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Заводи | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 10 | 5 | 6 | 7,2 | 5,6 |
| 20 | 12 | 14 | 12,8 | 11,2 |
| 30 | 20 | 18 | 19 | 22 |
| 40 | 28 | 24,4 | 26 | 28,4 |

9.9. У шеститонний літак завантажують предмети трьох найменувань. Наведена таблиця 9.25 містить дані про вагу одного предмету $w_i$ (в тоннах) і прибутки $r_i$ (в тис. грн.), які одержується від одного предмету, що завантажується. Як необхідно завантажити літак, щоб отримати максимальний прибуток?

Таблиця 9.25

| Предмет $i$ | $w_i$ | $r_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 70 |
| 2 | 1 | 20 |
| 3 | 2 | 40 |

9.10. Турист збирається у подорож по безлюдній місцевості і повинен упакувати рюкзак предметами трьох найменувань: їжу, засоби першої допомоги і одяг. Об’єм рюкзака складає 84 дм$^3$. Кожна одиниця їжі займає 28 дм$^3$, упаковка засобів першої допомоги – 7 дм$^3$, окремий предмет одягу – приблизно 14 дм$^3$. Турист визначив свої переваги ваговими коефіцієнтами 3, 4 і 5 – для їжі, засобів першої допомоги і одягу відповідно. Досвід підказує туристу, що він повинен взяти не менше одного предмету кожного найменування і не більше двох комплектів засобів першої допомоги. Скільки одиниць кожного найменування візьме турист у подорож?

9.11. У трьох областях необхідно побудувати п'ять підприємств по переробці сільськогосподарської продукції однакової потужності. Необхідно розмістити підприємства таким чином, щоб забезпечити мінімальні сумарні витрати на їх будівництво і експлуатацію. Функція витрат $g_i(x)$, яка характеризує величину витрат на будівництво і експлуатацію в залежності від кількості розміщених підприємств в $i$-ої області, наведена в таблиці 9.26.

Таблиця 9.26

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_1(x)$ | 8 | 14 | 22 | 29 | 34 |
| $g_2(x)$ | 10 | 17 | 18 | 27 | 31 |
| $g_3(x)$ | 11 | 16 | 15 | 26 | 31 |

9.12. Будівельний підрядник оцінює мінімальні потреби в робочій силі на кожний з наступних п'яти тижнів таким чином: 8, 4, 7, 8 і 2 робітників відповідно. Утримання надлишку робочої сили обходиться підрядчику у 300 грн. за одного робітника в тиждень, а наймання робочої сили на протязі одного тижня коштує 400 грн., плюс 200 грн. за кожного робітника в тиждень. Знайти оптимальний план наймання робітників.

9.13. Нехай, у вправі 9.12, кожному звільненому робочому виплачується вихідна допомога у розмірі 100 грн. Знайдіть оптимальний розв'язок задачі.

9.14. Туристичне агентство організовує тижневі поїздки на Кіпр. У відповідності з договором на найближчі чотири тижні агентство повинно забезпечити туристичні групи орендними автомобілями у кількості сім, чотири, сім і вісім штук відповідно. Агентство заключає договір з місцевим ділером по прокату автомобілів. Ділер призначає орендну плату за один автомобіль 220 євро на тиждень плюс 500 євро за будь-яку орендну угоду. Агентство, однак, може не повертати орендовані автомобілі в кінці тижня, і в цьому випадку воно виплачує тільки орендну плату в 220 євро. Яке оптимальне вирішення проблеми, пов'язаної із орендою автомобілів?

9.15. Фірма випускає п'ять типів механічних іграшок ($M1$, $M2$, ..., $M5$) і п'ять типів електронних іграшок ($E1$, $E2$, ..., $E5$). Більшою перевагою при покупці користуються іграшки з більшим номером. Це означає, що покупець буде брати іграшку з більшим номером, якщо та є у продажі. Тижневий попит на п'ять механічних іграшок дорівнює 300, 190, 240, 280 і 260 одиниць відповідно. Аналогічні показники для електронних іграшок дорівнюють 100, 180, 90, 250 і 190 одиниць відповідно. Виробництво однієї механічної іграшки обходиться у 20, 25, 15, 10 і 15 грн. відповідно. Виготовлення ж однієї електронної іграшки обходиться фірмі у 50, 60, 40, 45 і 30 грн. відповідно. Організація виробництва кожної механічної або електронної іграшки обходиться у 2500 грн. Визначити оптимальний план виробництва іграшок.

9.16. На протязі 10 днів спостерігалися наступні зміни запасів:

- початковий запас дорівнює нулю, а наступні дві доби товари надходили на склад неперервно і рівномірно по 500 шт. в день, витрати запасів не відбувалося;

- в послідуючі чотири дні попит на товари, що є в запасі був неперервним і рівномірним та дорівнював 250 шт. в день, поповнення запасів не відбувалося;
- в наступні чотири дні попит у товарах змінився до 200 шт. в день, з метою задоволення попиту і поповнення запасів кожного дня на склад доставлялось 300 шт. (поставки на склад і з складу проходили рівномірно і неперервно).

  Накресліть графік зміни запасів для 10-деного періоду, визначте величину запасів на складі до кінця періоду. Вирахуйте середній рівень запасів для всього періоду.

9.17. Фірмі, яка займається будівництвом пароплавів, необхідно 20 000 заклепок у рік, які витрачаються із сталою інтенсивністю. Організаційні витрати складають 0,5 тис. грн. за партію, ціна однієї заклепки – 10 грн. Витрати на зберігання однієї заклепки оцінені у 12,5 % її вартості.

9.18. Знайти оптимальний розмір партії постачання, оптимальну тривалість циклу та оптимальну кількість поставок у рік.

9.19. Відомо, що витрати на виконання замовлення – 2 гр. од., кількість товару, який реалізується за рік – 1000 шт., закупівельна ціна одиниці товару – 5 гр. од., витрати на зберігання – 20 % від закупівельної ціни. Знайти найбільш оптимальний розмір замовлення.

9.20. Система управління запасами деякого товару описується основною моделлю. Кожен рік із сталою інтенсивністю попит складає 15 000 од. товару, витрати на організацію постачання складають 10 грн. на партію, ціна одиниці товару – 30 грн., а витрати на її зберігання 7,5 грн. у рік. Знайти оптимальний розмір партії, кількість постачань, тривалість циклу.

9.21. Інтенсивність рівномірного попиту – 2000 од. товару у рік. Організаційні витрати для однієї партії – 20 тис. грн., ціна одиниці товару – 1 тис. грн., витрати на зберігання запасу – 100 грн. за од. товару у рік. Знайти оптимальний розмір партії, припускаючи, що система описується основною моделлю.

9.22. Відділ постачання компанії запропонував дві стратегії управління запасами.

9.23. Стратегія 1. Об’єм замовлення 150 одиниць при точці поновлення замовлення в 50 одиниць та терміну виконання замовлення 10 днів.

9.24. Стратегія 2. Об’єм замовлення 200 одиниць при точці поновлення замовлення в 75 одиниць та терміну виконання замовлення 15 днів.

9.25. Яку з двох стратегій слід затвердити? Якби ви відповідали за розробку стратегії управління запасами, яка була б ваша рекомендація?

9.26. Комплектуючі продаються по 25 грн. за одиницю, але передбачається 10% знижка при закупівлі партії від 150 одиниць та вище. Компанія за день використовує 20 одиниць комплектуючих. Вартість розміщення замовлення складає 50 грн., вартість зберігання одиниці товару складає 0,30 грн. за день. Чи варто компанії скористатися знижкою?

9.27. Підприємець має стабільний місячний попит на товар у кількості 50 од. Товар він закуповує у постачальника за ціною 6 гр. од. за штуку, до того ж витрати на оформлення постачання та інші підготовчі операції складають у кожному випадку 10 гр. од.

9.28. Як часто підприємець повинен поповнювати свій запас товарів, якщо витрати на зберігання дорівнюють 20 % ціни товару?

9.29. Фірма замість оптимального значення партії товару $q$ в основній моделі постачань замовила на 50% більше. На скільки зміняться загальні витрати на зберігання запасів і організацію постачань порівняно з оптимальним варіантом постачань товару?

9.30. Фірма замість оптимального значення партії товару $q$ в основній моделі постачань замовила на 50% менше. На скільки зміняться загальні витрати на зберігання запасів і організацію постачань порівняно з оптимальним варіантом постачань товару?

9.31. Відомо, що витрати на виконання замовлення рівні 10 гр. од., річний попит на товар – 1470 т, оптимальний розмір партії постачань – 35 т. Визначити річні витрати на виконання замовлення.

9.32. Товар, що користується попитом, продається з середньою швидкістю 45 од. на день, а виготовляється з швидкістю 450 од. на день. Витрати на організацію і доставку товару складає 5 тис. грн. за партію, витрати на зберігання запасів дорівнюють 20 % вартості товару. Вартість товару складається наступним чином: заробітна плата обслуговуючого персоналу складає 0,4, витрати на матеріали – 0,5, накладні витрати 0,6 грн. за одиницю товару (для кожної одиниці товару ці значення додаються). Знайти оптимальний розмір партії і мінімальні загальні витрати, пов'язані з утворенням запасу (у розрахунку на одиницю товару на протязі року). У році – 300 робочих днів.

9.33. Інтенсивність попиту в моделі виробничих постачань складає чверть швидкості виробництва, яка дорівнює 20 000 од. товару у рік. Організаційні витрати для однієї партії дорівнюють 150 грн., а витрати на зберігання одиниці товару на протязі року – 5 грн. Визначити оптимальний розмір партії.

9.34. Фірма, яка виступає в якості посередника, зобов'язується постачати заводу 5 одиниць необхідного вузла агрегату в день. Керівництво фірми вирішило доставляти вузли на свій склад партіями, кожна з яких містить 150 од. і вони розраховані на 30-дений термін. За один прострочений день у постачанні вузла заводу фірма виплачує штраф 200 грн. Витрати на зберігання одного вузла були оцінені в 250 грн. за тиждень, організаційними витратами можна знехтувати.

9.35. Знайти оптимальний рівень запасів і тривалість періоду дефіциту, що йому відповідає. Обчисліть зменшення витрат при оптимальній політиці управління запасами у порівнянні з політикою, коли на початку кожного періоду на склад поступає 150 вузлів.

# РОЗДІЛ 9
# СТОХАСТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

## 9.1. Формулювання стохастичних задач

У попередніх розділах були розглянуті задачі математичного програмування, які містили лише детерміновані (невипадкові) величини і оптимум цільової функції однозначно визначався вибором певного плану і деяких параметрів.

Будь-які економічні дані являють собою кількісні характеристики яких-небудь економічних об'єктів. Вони формуються під впливом множини факторів, які не всі доступні зовнішньому контролю. Неконтрольовані фактори можуть приймати випадкові значення з деякої множини значень і тим самим обумовлювати випадковість даних, які вони визначають. Стохастична природа економічних даних обумовлює необхідність застосування спеціальних методів для їх аналізу і обробки.

Стохастичні задачі є найбільш адекватними багатьом важливим процесам економіки. Вони виникають скрізь, де треба приймати оптимальне рішення в умовах невизначеності, причому природа невизначеності може бути різноманітна: недостатність знань про природу розглядуваного процесу, неможливість контролю і передбачення, що стосується зміни параметрів процесу, і т. д. Усе це не дає змоги прийняти однозначне оптимальне рішення, яке гарантувало б оптимізацію цільової функції. Коректні постановки і розв'язування стохастичних задач утруднюється тим, що важко встановити єдиний критерій (міру) оптимальності розв'язку в умовах невизначеності.

Виділяють два підходи до формулювання стохастичних задач, а тобто і два типи цих задач.

1. Найширше застосовуваний підхід до стохастичних задач полягає в усереднюванні випадкових величин, тобто в зведені задачі до детермінованої. Це дає змогу значно спростити задачу і в більшості випадків ді-

стати план, який з достатньою вірогідністю можна вважати оптимальним. Задачу цього типу можна записати так:

$$z = f\left(\vec{X}, \vec{\Theta}\right) \to opt \qquad (10.1)$$

при умовах

$$g_i\left(\vec{X}, \vec{\Theta}\right) \le 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (10.2)$$

де $\vec{X}$ – вектор невідомих (керованих) змінних;

$\vec{\Theta}$ – вектор випадкових параметрів.

Очевидно, при довільному плані $\vec{X}'$ (в тому числі і оптимальному) величина $z$ буде випадковою, а оскільки випадкові параметри входять і в систему обмежень, то і границі множини планів теж будуть невизначеними. Отже, саме поняття оптимального плану для стохастичної задачі є неоднозначним і потребує певної конкретизації. Однією з поширених конкретизацій поняття оптимального плану є його визначення як оптимального плану задачі, одержаної з (10.1), (10.2) шляхом заміни випадкових величин $f\left(\vec{X}, \vec{\Theta}\right)$ та $g_i\left(\vec{X}, \vec{\Theta}\right)$ їх математичними сподіваннями, тобто

$$z = Mf\left(\vec{X}, \vec{\Theta}\right) \to opt, \qquad (10.1a)$$

$$Mg_i\left(\vec{X}, \vec{\Theta}\right) \le 0,\ i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (10.2a).$$

Однак, якщо дисперсія $Df\left(\vec{X}, \vec{\Theta}\right)$ велика, то при оптимальному плані задачі (10.1а), (10.2а) реальне значення $z$ може випадково бути надто далеким від оптимального значення $z^*$. Тому часто в цільові функції або в обмеження таких задач вводять дисперсії і моменти вищих порядків.

2. Іноді стохастична задача формулюється як задача визначення плану, що максимізує ймовірність досягнення певного рівня виробництва, прибутку чи витрат.

У такому формулюванні задача стохастичного програмування може бути записана так:

$$z = P\left\{f\left(\vec{X}, \vec{\Theta}\right) \ge c\right\} \to opt \qquad (10.3)$$

при умовах

$$G_i\left(\vec{X}\right) = P\left\{g_i\left(\vec{X}, \vec{\Theta}\right)\right\} \le 0\,,\; i = 1, 2, \ldots, m\,. \qquad (10.4)$$

Одним із способів дослідження задач (10.3), (10.4) є їх зведення до задач типу (10.1а), (10.2а).

Можливі також комбіновані задачі із задач (10.1), (10.2) та (10.3), (10.4).

## 9.2. Методи розв'язування задач стохастичного програмування

Методи дослідження стохастичних задач, які використовують в повній мірі імовірнісні характеристики їх функцій, називають *прямими методами*. Так звані *непрямі методи* полягають в усередненні самих випадкових параметрів, тобто замість задачі (10.1), (10.2) розглядають таку задачу:

$$z' = f\left(\vec{X}, \left\langle\vec{\Theta}\right\rangle\right) \to opt\,, \qquad (10.5)$$

$$g_i'\left(\vec{X}\right) = g_i\left(\vec{X}, \left\langle\vec{\Theta}\right\rangle\right) \le 0\,, \qquad (10.6)$$

де $\left\langle\vec{\Theta}\right\rangle$ – математичне сподівання (середнє значення) параметрів.

Розглянемо, наприклад, лінійну задачу з випадковими коефіцієнтами в цільовій функції.

Для спрощення візьмемо двовимірну задачу, а коефіцієнти лінійної форми вважатимемо нормально розподіленими і стохастично незалежними. Нехай треба розв'язати задачу:

$$\begin{gathered}
z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max\,,\\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1\,,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2\,,\\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\,,\\
f\left(c_1\right) = N\left(\bar{c}_1, \sigma_1^2\right),\; f\left(c_2\right) = N\left(\bar{c}_2, \sigma_2^2\right),
\end{gathered} \qquad (10.7)$$

де $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ –математичні сподівання випадкових коефіцієнтів.

Величина цільової функції $z$ є, таким чином, випадковою величиною з законом розподілу

$$f(z)=N\left(z,\sigma_z^2\right)=N\left(\bar{c}_1x_1+\bar{c}_2x_2,\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2\right). \qquad (10.8)$$

Цілком зрозуміло, що за своєю природою випадкова величина $z$ з нормальним законом розподілу може набувати довільних значень в інтервалі всієї числової осі при довільному плані $\vec{X}=(x_1,x_2)$ із скінченними значеннями величини компонент $x_1$ і $x_2$, а оптимальний, у розумінні максимуму величини $z$, план може іноді призвести до найгіршого практичного результату. Крім того, зрозуміло, що немає критерію визначення оптимального плану за максимізацією випадкової величини $z$ з нормальним законом розподілу.

Сказане не означає, що задача (10.7) не має смислу. Як видно з (10.8), розподіл випадкової величини $z$ залежить від керованих змінних задачі. Тому задача (10.7) може полягати в знаходженні найкращого в певному розумінні розподілу випадкової величини $z$. Критеріїв оптимальності розподілу може бути кілька. Природним буде критерій максимуму математичного сподівання $z$, тобто $\bar{z}=\bar{c}_1x_1+\bar{c}_2x_2\to\max$ при обмеженнях задачі (10.7). Проте може виявитись, що оптимальний за цим критерієм план дає дуже велику дисперсію $\sigma_z^2=\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2$, від чого практична цінність такого оптимального плану різко знижується. Тоді природно виникає потреба накласти обмеження на дисперсію $\sigma_z^2$, тобто задачу (10.7) подати у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\bar{z}=\bar{c}_1x_1+\bar{c}_2x_2\to\max,\\
&a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2,\\
&x_1\ge 0, x_2\ge 0,\\
&\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2\le\sigma_0^2,
\end{aligned} \qquad (10.9)$$

де $\sigma_0^2$ не повинно бути меншим за

$$\min \sigma_z^2 = \min\left(\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2\right)$$

при $x_1, x_2$, що задовольняють лінійні обмеження задачі.

Задача (10.9) вже буде нелінійною.

Іншу модифікацію задачі (10.7) дістанемо, застосовуючи критерій мінімізації дисперсії $\sigma_z^2$ при заданій нижній межі значення $\bar{z}_{\min} = z_0$, тобто

$$\begin{aligned} &\sigma_z^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 \to \min, \\ &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ &c_1x_1 + c_2x_2 \ge z_0, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Задача (10.10) є задачею квадратичного програмування. Визначивши оптимальний план однієї з задач (10.9) чи (10.10), тим самим установлюють функції розподілу величини $z$, звідки можна знайти надійні границі для оптимального значення $z^*$ при заданому рівні значущості.

Все вищесказане справедливе для довільної кількості змінних.

Розглянемо приклад з однією невідомою.

---

**Приклад 10.1.** У буряково-цукровому комплексі мають $S$ коштів, які необхідно розподілити між розширенням сировинної бази і збільшенням потужностей з її переробки. Потрібно так спланувати розподіл коштів, щоб отримати найбільшу кількість цукру. Вихідні дані задачі: $q_1$ – питомі витрати коштів на вирощування цукрового буряка на одному гектарі, $q_2$ – питомі приведені витрати на створення одиниці потужності, $r$ – частка виходу цукру з одиниці сировини. При цьому урожайність цукрових буряків $c$ вважається випадковою величиною і статистичні дані по ній за 10 років подані у таблиці 10.1.

Таблиця 10.1

| Рік | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Урожайність, ц/га | 205 | 201 | 198 | 195 | 210 | 201 | 202 | 195 | 201 | 192 |

*Розв’язання*. Нехай $x$ – планова площа під цукровим буряком, $y$ – планова потужність цукрового заводу.

Потрібно максимізувати приріст обсягу виробництва цукру за обмежених коштів. Економіко-математична модель набуває вигляду:

$$z(x, y) = \min\{rcx, ry\} \to \max$$

за умов

$$q_1 x + q_2 y \le S\,,$$

$$x \ge 0, y \ge 0\,.$$

Урожайність $c$ є випадковою величиною. Перейдемо до детермінованої задачі скориставшись вибірковим середнім для урожайності:

$$\bar{c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i = \frac{1}{10}\left(1\cdot 192 + 2\cdot 195 + 1\cdot 198 + 3\cdot 201 + 1\cdot 202 + 1\cdot 205 + 1\cdot 210\right) = 200\,.$$

Цільова функція, що є *функцією Леонтьєва*, приймає вигляд $z = \min\{200rx, ry\}$ і має стаціонарну точку, яка визначається рівністю

$$200rx = ry\,,$$

звідки $y = 200x$.

Розв’язавши систему

$$y = 200x$$

$$q_1 x + q_2 y = S\,,$$

отримуємо оптимальний розв’язок

$$x = \frac{S}{q_1 + 200q_2}\,,\ y = \frac{200S}{q_1 + 200q_2}\,.$$

---

Розглянемо оптимізаційну задачу з *імовірнісними обмеженнями*, яка має наступний вигляд:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

при обмеженнях

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right\} \ge 1 - \alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Термін „імовірнісні обмеження” обумовлений тим, що кожне обмеження задачі повинне виконуватись з імовірністю не меншою, ніж $1 - \alpha_i$, $0 < \alpha_i < 1$. Передбачається, що всі коефіцієнти $a_{ij}$ і $b_i$ є випадковими величинами. Наведені обмеження можна переписати у вигляді

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j > b_i\right\} \le \alpha_i,$$

в якому значення $\alpha_i$ можна трактувати як *ризик* і розуміти його так: імовірність того, що $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j > b_i$ не перевищує значення ризику $\alpha_i$. Наприклад, $\alpha_i$ може бути ризиком (імовірністю) перевищення фонду робочого часу, запасів сировини і т. ін.

Розглянемо три випадки. Перші два відповідають припущенням про те, що тільки або $a_{ij}$, або $b_i$ є випадковими величинами, а третій поєднує ці два випадки. У всіх трьох випадках передбачається, що параметри є нормально розподіленими випадковими величинами з відомими математичними сподіваннями і дисперсіями.

***Випадок 1***. Передбачається, що всі $a_{ij}$ є нормально розподіленими випадковими величинами з математичними сподіваннями $M(a_{ij})$ і дисперсіями $D(a_{ij})$. Також відомі коваріації $\mathrm{cov}(a_{ij}, a_{kl})$ випадкових величин $a_{ij}$ і $a_{kl}$.

Розглянемо $i$-те обмеження задачі

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right\} \ge 1-\alpha_i$$

і введемо позначення

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j .$$

Випадкова величина $h_i$ має нормальний розподіл з математичним сподіванням $M(h_i) = \sum_{j=1}^{n} M(a_{ij}) x_j$ і дисперсією $D(h_i) = \vec{X}^T D_i \vec{X}$, де

$\vec{X}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$D_i = \begin{pmatrix} D(a_{i1}) & \ldots & \operatorname{cov}(a_{i1}, a_{in}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \operatorname{cov}(a_{in}, a_{i1}) & \ldots & D(a_{in}) \end{pmatrix}$ – $i$-я матриця коваріацій.

Тоді маємо

$$P\{h_i \le b_i\} = P\left\{\frac{h_i - M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}} \le \frac{b_i - M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}}\right\} \ge 1-\alpha_i ,$$

де $\frac{h_i - M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}}$ – нормована нормально розподілена випадкова величина з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією. Це означає, що

$$P\{h_i \le b_i\} = F\left(\frac{b_i - M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}}\right),$$

де через $F$ позначена функція розподілу стандартного нормального розподілу:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Нехай $K_{\alpha i}$ – значення стандартної нормально розподіленої випадкової величини, яка визначається з рівняння

$$F(K_{\alpha i}) = 1-\alpha_i .$$

В цьому випадку нерівність $P\{h_i \le b_i\} \ge 1-\alpha_i$ виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{b_i - M(h_i)}{\sqrt{D(h_i)}} \ge K_{\alpha i}.$$

Це приводить до детермінованого нелінійного обмеження, яке еквівалентне вихідному імовірнісному

$$\sum_{j=1}^{n} M(a_{ij})x_j + K_{\alpha i}\sqrt{\vec{X}^T D_i \vec{X}} \le b_i.$$

Зокрема, якщо $a_{ij}$ – незалежні нормально розподілені випадкові величини, тоді $\operatorname{cov}(a_{ij}, a_{kl}) = 0$ і остання нерівність приймає вигляд

$$\sum_{j=1}^{n} M(a_{ij})x_j + K_{\alpha i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} D(a_{ij})x_j^2} \le b_i.$$

Дане обмеження можна записати у вигляді обмежень задачі сепарабельного програмування, для чого використовується заміна змінних

$$y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} D(a_{ij})x_j^2},\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Отже, вихідне обмеження еквівалентне нерівності

$$\sum_{j=1}^{n} M(a_{ij})x_j + K_{\alpha i}y_i \le b_i$$

і рівнянню

$$\sum_{j=1}^{n} D(a_{ij})x_j^2 - y_i^2 = 0.$$

***Випадок 2***. Тут припускається, що тільки $b_i$ є нормально розподільними випадковими величинами з математичним сподіванням $M(b_i)$ і дисперсією $D(b_i)$. Аналіз цієї ситуації проводиться аналогічно випадку 1. Розглянемо стохастичне обмеження

$$P\left\{b_i \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right\} \ge \alpha_i.$$

Як і у першому випадку, маємо

$$P\left\{\frac{b_i - M(b_i)}{\sqrt{D((b_i))}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - M(b_i)}{\sqrt{D(b_i)}}\right\} \geq \alpha_i .$$

Це обмеження виконується лише при виконанні нерівності

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - M(b_i)}{\sqrt{D(b_i)}} \leq K_{\alpha i} .$$

Отже, вихідне імовірнісне обмеження еквівалентне детермінованому лінійному

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq M(b_i) + K_{\alpha i}\sqrt{D(b_i)} .$$

***Випадок 3.*** Тепер припустимо, що всі параметри $a_{ij}$ і $b_i$ є нормально розподілені випадкові величини. Перепишемо обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

у вигляді

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq 0 .$$

Так як всі $a_{ij}$ і $b_i$ розподілені за нормальним законом, у відповідності з відомими результатами математичної статистики величина $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$ також має нормальний розподіл. Звідси випливає, що цей варіант подібний до випадку 1 і може бути розглянутий аналогічним чином.

**Приклад 10.2.** Розглянемо задачу з імовірнісними обмеженнями

$$z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to \max$$

при обмеженнях

$$P\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq 8\} \geq 0{,}95 \quad ,$$

$$P\{5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq b_2\} \geq 0{,}90 \quad ,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Нехай $a_{1j}$ – незалежні нормально розподілені випадкові величини з наступними значеннями математичних сподівань і дисперсій

$$M(a_{11}) = 1, \; M(a_{12}) = 3, \; M(a_{13}) = 9,$$

$$D(a_{11}) = 25, \; D(a_{12}) = 16, \; D(a_{13}) = 4.$$

Нехай параметр $b_2$ є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням $M(b_2) = 7$ і дисперсією $D(b_2) = 9$.

*Розв'язання*. За таблицею функції розподілу стандартного нормального закону знаходимо

$$K_{\alpha 1} = K_{0{,}05} = 1{,}645, \; K_{\alpha 2} = K_{0{,}10} = 1{,}285.$$

*Зауваження*. Можна скористатися таблицею функції Лапласа $\Phi(z)$ (Додаток Б), так як $F(z) = 0{,}5 + \Phi(z)$.

Перше обмеження задачі еквівалентне детермінованої нерівності

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 1{,}645\sqrt{25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2} \leq 8,$$

а друге обмеження – нерівності

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 7 + 1{,}285 \cdot 3 = 10{,}855.$$

Якщо покласти

$$y^2 = 25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2,$$

вихідна задача приймає наступний вигляд.

$$z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to \max$$

при обмеженнях

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 1{,}645y \leq 8,$$

$$25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2 - y^2 = 0,$$

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 10{,}855,$$

$$x_1, x_2, x_3, y \geq 0,$$

і може бути розв'язана методами сепарабельного програмування.

## 9.3. Імовірнісне динамічне програмування

Імовірнісне динамічне програмування відрізняється від детермінованого динамічного програмування, описаного у розділі 9, тим, що стани і показник ефективності (цільова функція) на кожному етапі є випадковими величинами. Моделі імовірнісного динамічного програмування виникають, зокрема, при розгляданні стохастичних моделей управління запасами і в теорії марковських процесів прийняття рішень. Ці дві теми детально розглядаються у курсі дослідження операцій, тому у цьому параграфі вони не розглядаються. В цьому параграфі описуються два приклади достатньо загального змісту, які розкривають стохастичну природу динамічного програмування.

<u>*Задача інвестування.*</u>

Дехто планує інвестувати $S$ тисяч у. г. од. через фондову біржу на протязі наступних $n$ років. Інвестиційний план полягає у покупці акцій на початку року і продажі їх в кінці цього ж року. Накопичені кошти потім можуть бути знову інвестовані (всі або частина їх) на початку наступного року. Степінь ризику інвестиції характеризується тим, що прибуток має імовірнісний характер. Вивчення ринку свідчить про те, що прибуток від інвестиції залежить від $m$ умов ринку (сприятливих або несприятливих). При цьому умова $k$ приводить до прибутку $r_k$ з імовірністю $p_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Як треба інвестувати $S$ тисяч у. г. од. для найбільшого накопичення на кінець $n$-го року?

Позначимо:

$x_i$ – сума грошових коштів, які доступні для інвестування на початку $i$-го року ($x_1 = S$);

$y_i$ – сума реальної інвестиції на початку $i$-го року ($y_i \le x_i$).

Елементи моделі динамічного програмування можна описати так:

1. *Етап* $i$ являє собою $i$-й рік інвестування.
2. *Альтернативами* на етапі $i$ є величини $y_i$.

3. *Стан* системи на етапі $i$ описується величиною $x_i$.

Нехай $f_i(x_i)$ – максимальна очікувана сума надходження грошових коштів за роки від $i$ до $n$ при умові, що на початку $i$-го року є сума $x_i$. Для $k$-ї умови ринку маємо наступне:

$$x_{i+1} = (1 + r_k)y_i + (x_i - y_i) = r_k y_i + x_i,\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Так як імовірність $k$-ї умови ринку дорівнює $p_k$, рекурентне рівняння динамічного програмування має наступний вигляд:

$$f_i(x_i) = \max_y \left\{ \sum_{k=1}^{m} p_k\, f_{i+1}(x_i + r_k y_i) \right\},\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

де $f_{n+1}(x_{n+1}) = x_{n+1}$, так як після $n$-го року інвестицій немає. Звідси випливає, що

$$f_n(x_n) = \max_y \left\{ \sum_{k=1}^{m} p_k (x_n + r_k y_n) \right\} = x_n \sum_{k=1}^{m} p_k (1 + r_k) = x_n (1 + p_1 r_1 + p_2 x_2 + \ldots p_m r_m),$$

оскільки функція у фігурних дужках є лінійною по $y_n$ і тому досягає свого максимуму при $y_n = x_n$. Крім того врахована очевидна рівність $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$.

---

**Приклад 10.3.** Нехай у попередній моделі об'єм інвестицій складає $S = 10\,000$ у. г. о. на 4-річний період. Існує 40%-ва імовірність того, що ви подвоїте гроші, 20%-ва – залишитесь при своїх грошах і 40%-ва – втратите весь об'єм інвестиції. Треба розробити оптимальну стратегію інвестування.

*Розв'язання.* Використовуючи прийняті в моделі позначення, маємо наступне:

$S = 10000$; $n = 4$; $m = 3$;

$p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}4$;

$r_1 = 2$, $r_2 = 0$, $r_3 = -1$.

*Етап 4.*

$$f_4(x_4) = x_4(1 + 0{,}4 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot (-1)) = 1{,}4 x_4.$$

Звідки отримуємо

Таблиця 10.2

| Стан | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|
| | $f_4(x_4)$ | $y_4^*$ |
| $x_4$ | $1{,}4x_4$ | $x_4$ |

*Етап 3.*

$$f_3(x_3) = \max_y\{p_1 f_4(x_3 + r_1 y_3) + p_2 f_4(x_3 + r_2 y_3) + p_3 f_4(x_3 + r_3 y_3)\} =$$
$$= \max_y\{0{,}4 \cdot 1{,}4(x_3 + 2y_3) + 0{,}2 \cdot 1{,}4(x_3 + 0y_3) + 0{,}4 \cdot 1{,}4(x_3 + (-1)y_3)\} =$$
$$= \max_y\{1{,}4x_3 + 0{,}56y_3\} = 1{,}96x_3.$$

Тому маємо

Таблиця 10.3

| Стан | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|
| | $f_3(x_3)$ | $y_3^*$ |
| $x_3$ | $1{,}96x_3$ | $x_3$ |

*Етап 2.*

$$f_2(x_2) = \max_y\{p_1 f_3(x_2 + r_1 y_2) + p_2 f_3(x_2 + r_2 y_2) + p_3 f_3(x_2 + r_3 y_2)\} =$$
$$= \max_y\{0{,}4 \cdot 1{,}96(x_2 + 2y_2) + 0{,}2 \cdot 1{,}96(x_2 + 0y_2) + 0{,}4 \cdot 1{,}96(x_2 + (-1)y_2)\} =$$
$$= \max_y\{1{,}96x_2 + 0{,}784y_2\} = 2{,}744x_2.$$

Звідки випливає

Таблиця 10.4

| Стан | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|
| | $f_2(x_2)$ | $y_2^*$ |
| $x_2$ | $2{,}744x_2$ | $x_2$ |

*Етап 1.*

$$f_1(x_1) = \max_y \{p_1 f_2(x_1 + r_1 y_1) + p_2 f_2(x_1 + r_2 y_1) + p_3 f_2(x_1 + r_3 y_1)\} =$$
$$= \max_y \{0{,}4 \cdot 2{,}744(x_1 + 2y_1) + 0{,}2 \cdot 2{,}744(x_1 + 0y_1) + 0{,}4 \cdot 2.744(x_1 + (-1)y_1)\} =$$
$$= \max_y \{2{,}744 x_1 + 1{,}0976 y_1\} = 3{,}8416 x_1.$$

Маємо

Таблиця 10.5

| Стан | Оптимальний розв'язок | |
|---|---|---|
| | $f_1(x_1)$ | $y_1^*$ |
| $x_1$ | $3{,}8416x_1$ | $x_1$ |

Оптимальну інвестиційну політику можна сформулювати наступним чином. Так як $y_i^* = x_i$ для $i = 1, 2, 3, 4$, то оптимальним розв'язком є інвестування всіх наявних грошових коштів на початку кожного року. Накопичені грошові кошти на кінець чотирьох років складатиме $3{,}8416x_1 = 3{,}8416S = 3{,}8416 \cdot 10000 = 38416$ у. г. о.

---

<u>*Максимізація імовірності досягнення мети.*</u>

У попередньому прикладі розглядалась задача, пов'язана з максимізацією очікуваного доходу. Іншим корисним критерієм для розглянутої задачі є максимізація імовірності досягнення певного рівня доходу. Продемонструємо цей підхід на прикладі моделі інвестування, яка описана у попередньому прикладі.

Використовуючи введені вище позначення, залишимо без змін визначення *етапу* $i$, *альтернативи* $y_i$ і *стану* $x_i$.Ці моделі відрізняються лише визначенням критерію. Тут нашою метою є максимізація імовірності досягнення деякої накопиченої суми $C$ після закінчення $n$ років. З цієї точки зору визначимо функцію $f_i(x_i)$ як імовірність накопичення суми $C$, якщо на початку $i$-го року є грошові кошти у розмірі $x_i$ і для наступних років застосовується оптимальне інвестування.

Рекурентне рівняння динамічного програмування має вигляд

$$f_n(x_n) = \max_y \left\{ \sum_{k=1}^{m} p_k P\{x_n + r_k y_n \geq C\} \right\},$$

$$f_i(x_i) = \max_y \left\{ \sum_{k=1}^{m} p_k f_{i+1}(x_i + r_k y_i) \right\}, \; i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Рекурентна формула основана на формулі умовної імовірності

$$P\{A\} = \sum_{j=1}^{m} P\{A \mid B_j\} \cdot P\{B_j\}.$$

У нашому випадку $f_{i+1}(x_i + r_k y_i)$ відіграє роль імовірності $P\{A \mid B_j\}$.

---

**Приклад 10.4.** Дехто планує інвестувати 2 000 євро. Існуючі варіанти дозволяють подвоїти цю суму з імовірністю 0,3 або втратити її з імовірністю 0,7. Акції продаються в кінці року, а на початку наступного року всі гроші або їх частина знову інвестуються. Цей процес повторюється на протязі трьох років. Метою є максимізація імовірності досягнення суми у 4 000 євро на кінець третього року.

*Розв'язання.* У відповідності з позначеннями даної моделі, маємо $r_1 = 1$ з імовірністю 0,3 і $r_2 = -1$ з імовірністю 0,7.

*Етап 3.*

На цьому етапі стан $x_3$ може змінюватись від 0 до 8 000 євро (від 0 до 8 тис.). Мінімальне значення можливе, коли вся інвестиція втрачена, а максимальне – коли інвестиція подвоюється в кінці кожного з двох перших років. Отже, рекурентне рівняння для етапу 3 записується в наступному вигляді:

$$f_3(x_3) = \max_y \{0{,}3P\{x_3 + y_3 \geq 4\} + 0{,}7P\{x_3 - y_3 \geq 4\}\},$$

де $x_3 = 0, 1, \ldots, 8$.

Таблиця 10.6 містить деталі обчислень для даного етапу. Всі замальовані комірки таблиці є непідходящими, так як не задовольняють умову $y_3 \leq x_3$. Крім того, при виконанні обчислень можна помітити, що

$$P\{x_3 + y_3 \geq 4\} = 0, \text{ якщо } x_3 + y_3 < 4,$$

$$P\{x_3 - y_3 \geq 4\} = 0\text{, якщо } x_3 - y_3 < 4.$$

У протилежному випадку ці імовірності дорівнюють одиниці.

Хоч наведена таблиця 10.6 і свідчить про те, що існують альтернативні оптимуми для $x_3 = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, оптимальний (останній) стовпець містить лише найменше оптимальне значення $y_3$. Це пояснюється тим, що інвестор не збирається інвестувати більше того, що необхідно для досягнення поставленої мети.

Таблиця 10.6

| $x_3$ | $0{,}3P\{x_3+y_3\ge 4\}+0{,}7P\{x_3-y_3\ge 4\}$ | | | | | | | | | Оптимум | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y_3=0$ | $y_3=1$ | $y_3=2$ | $y_3=3$ | $y_3=4$ | $y_3=5$ | $y_3=6$ | $y_3=7$ | $y_3=8$ | $f_3$ | $y_3$ |
| 0 | 0,3·0+ 0,7·0=0 | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 1 | 0,3·0+ 0,7·0=0 | 0,3·0+ 0,7·0=0 | | | | | | | | 0 | 0 |
| 2 | 0,3·0+ 0,7·0=0 | 0,3·0+ 0,7·0=0 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | | | | | | | 0,3 | 2 |
| 3 | 0,3·0+ 0,7·0=0 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | | | | | | 0,3 | 1 |
| 4 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | | | | | 1 | 0 |
| 5 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | | | | 1 | 0 |
| 6 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | | | 1 | 0 |
| 7 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | | 1 | 0 |
| 8 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 1 | 0 |

*Етап 2.*

$$f_2(x_2) = \max_y \{0{,}3 f_3(x_2 + y_2) + 0{,}7 f_3(x_2 - y_2)\}.$$

Таблиця 10.7

| $x_2$ | $0{,}3 f_3(x_2 + y_2) + 0{,}7 f_3(x_2 - y_2)$ | | | | | Оптимум | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y_2 = 0$ | $y_2 = 1$ | $y_2 = 2$ | $y_2 = 3$ | $y_2 = 4$ | $f_2$ | $y_2$ |
| 0 | 0,3·0+ 0,7·0=0 | | | | | 0 | 0 |
| 1 | 0,3·0+ 0,7·0=0 | 0,3·0,3+ 0,7·0=0,09 | | | | 0,09 | 1 |
| 2 | 0,3·0,3+ 0,7·0,3=0,3 | 0,3·0,3+ 0,7·0=0,09 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | | | 0,30 | 0 |
| 3 | 0,3·0,3+ 0,7·0,3=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0,3=0,51 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | | 0,51 | 1 |
| 4 | 0,3·1+ 0,7·1=1 | 0,3·1+ 0,7·0,3=0,51 | 0,3·1+ 0,7·0,3=0,51 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 0,3·1+ 0,7·0=0,3 | 1 | 0 |

*Етап 1.*

$$f_1(x_1) = \max_y \{0{,}3 f_2(x_1 + y_1) + 0{,}7 f_2(x_1 - y_1)\}.$$

Таблиця 10.8

| $x_1$ | $0{,}3 f_2(x_1 + y_1) + 0{,}7 f_2(x_1 - y_1)$ | | | Оптимум | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $y_1 = 0$ | $y_1 = 1$ | $y_1 = 2$ | $f_1$ | $y_1$ |
| 2 | 0,3·0,3+0,7·0,3=0,3 | 0,3·0,51+0,7·0,09=0,216 | 0,3·1+0,7·0=0,3 | 0,3 | 0 |

Оптимальна стратегія визначається наступним чином. При заданій початковій сумі $x_1 = 2000$ євро обчислення для першого етапу дають $y_1 = 0$. Це означає, що у перший рік не слід робити інвестицій. Дане рішення залишає інвестора з 2 000 євро на початок другого року. З таблиці 10.8, яка відповідає другому етапу, при $x_2 = 2$ отримуємо $y_2 = 0$. Це знову означає, що на протязі другого року також не слід робити інвестицій. Далі використання значення $x_3 = 2$ на третьому етапі приводить до $y_3 = 2$, а це означає, що на третій рік слід інвестувати всю суму, яка є в наявності. Відповідна максимальна імовірність досягнення мети $C = 4$ дорівнює $f_1(2) = 0{,}3$.

## Питання для самоконтролю

1. Сутність задач стохастичного програмування.
2. Типи стохастичних задач, їх особливості та формулювання.
3. Методи розв'язування стохастичних задач.
4. Приклади задач стохастичного динамічного програмування.

## Вправи

10.1. Відомо, що в комерційних банках нараховується більший процент на вкладені суми порівняно з ощадним, але повернення внеску не гарантується. Перед кожним вкладником постає дилема: мати меншу, але гарантовану суму, або більшу, проте з ризиком втрати внеску. З ризиком невикористаних можливостей пов'язаний внесок до ощадного банку. Нехай $S$ – загальна сума грошових коштів певного власника, $a, b$ – процент нарахування відповідно в ощадному і комерційному банках, $p$ – імовірність ліквідації (банкрутства) комерційного банку. Запишіть математичну модель задачі.

10.2. Для виготовлення виробів двох видів ( $j = 1, 2$ ) можна використати обладнання двох груп ( $i = 1, 2$ ); $a_{ij}$ – витрати часу цими групами обладнання на виготовлення одиниці продукції певного виду. Собівартість одного виробу $b_{ij}$ є випадковою величиною, яка розподілена рівномірно в інтервалі $(\gamma_{ij}, \delta_{ij})$. Нехай $N_1 = 100$ шт., $N_2 = 200$ шт. – плани випуску продукції, що обумовлені контрактом.

Визначити оптимальний план роботи обладнання, за якого мінімізуються сподівані сумарні виробничі витрати на випуск виробів, якщо ризик невиконання контракту не перевищує 0,05.

Побудувати математичну модель задачі і розв'язати її для даних, наведених у таблиці 10.9.

Таблиця 10.9

| Група обладнання $i$ | Питомі витрати часу, год/шт. | | Питома собівартість виробу, грн/шт. | | | | Фонд робочого часу, год. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $j$=1 | $j$=2 | $j$=1 | | $j$=2 | | |
| | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | $\gamma_{i1}$ | $\delta_{i1}$ | $\gamma_{i2}$ | $\delta_{i2}$ | |
| 1 | 0,2 | 0,3 | 2 | 4 | 1 | 2 | 50 |
| 2 | 0,1 | 0,1 | 3 | 6 | 2 | 8 | 65 |

10.3. Приведіть наступну задачу стохастичного програмування до еквівалентної детермінованої моделі.

$$z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$$

при обмеженнях

$$P\{a_1x_1 + 3x_2 + a_3x_3 \le 10\} \ge 0{,}9;$$

$$P\{7x_1 + 5x_2 + x_3 \le b_2\} \ge 0{,}1;$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Нехай $a_1$ і $a_3$ є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами з математичними сподіваннями $M(a_1) = 2$ і $M(a_3) = 5$ та дисперсіями $D(a_1) = 9$ і $D(a_3) = 16$. Передбачається також, що $b_2$ – нормально розподілена величина з математичним сподіванням $M(b_2) = 15$ і дисперсією $D(b_2) = 25$.

10.4. Дана наступна задача стохастичного програмування.

$$z = x_1 + x_2^2 + x_3 \to \max$$

при обмеженнях

$$P\{x_1^2 + a_2x_2^3 + a_3\sqrt{x_3} \le 10\} \ge 0{,}9;$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Нехай параметри $a_2$ і $a_3$ – незалежні нормально розподілені випадкові величини з математичними сподіваннями 5 і 2 та дисперсіями 16 і 25 відповідно. Приведіть дану задачу до детермінованої задачі сепарабельного програмування.

10.5. Деталі A, B, C, ( $j=1,2,3$ ) можна обробляти на трьох верстатах ( $i=1,2,3$ ). Припустимо, що норми витрат часу на обробку $j$-ї деталі на $i$-му верстаті випадкові та розподілені згідно з рівномірним законом у інтервалі $(\gamma_{ij},\delta_{ij})$, ціна $j$-ї деталі $C_j$ – також випадкова величина, що розподілена за нормальним законом із математичним сподіванням $M(C_j)$ та дисперсією $D(C_j)$. Значення величин наведено в таблицях 10.10 та 10.11. Нехай будь-яка деталь може бути виготовлена на будь-якому верстаті.

Визначити оптимальну виробничу програму, яка забезпечує виконання таких умов;

- максимум сподіваної вартості товарної продукції за мінімального ризику;
- максимум сподіваного сумарного прибутку за мінімального ризику.

Таблиця 10.10

| Верстат $i$ | Норми часу на обробку деталі | | | | | | Плата за 1 год. роботи верстата | Ліміт часу роботи верстата |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | | B | | C | | | |
| | $\gamma_{i1}$ | $\delta_{i1}$ | $\gamma_{i2}$ | $\delta_{i2}$ | $\gamma_{i3}$ | $\delta_{i3}$ | | |
| 1 | 0,2 | 0,4 | 0,1 | 0,2 | 0,05 | 0,1 | 30 000 | 40 |
| 2 | 0,6 | 1,0 | 0,1 | 0,3 | 0,1 | 0,4 | 10 000 | 50 |
| 3 | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,5 | 20 000 | 60 |

Таблиця 10.11

| Характеристика | Ціна деталі | | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| $M(C_j)$ | 10 | 16 | 12 |
| $D(C_j)$ | 5 | 10 | 8 |

10.6. Визначіть оптимальну інвестиційну політику в прикладі 10.3 у припущені, що імовірності $p_k$ і прибутки $r_k$ для наступних чотирьох років приймають такі значення наведені у таблиці 10.12.

Таблиця 10.12

| Рік | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 0,5 | 0,1 | 0,4 | 0,5 |
| 2 | 1 | 0 | –1 | 0,4 | 0,4 | 0,2 |
| 3 | 4 | –1 | –1 | 0,2 | 0,4 | 0,4 |
| 4 | 0,8 | 0,4 | 0,2 | 0,6 | 0,2 | 0,2 |

10.7. Камера об'ємом 10 кубічних метрів призначена для зберігання виробів трьох найменувань. Один виріб найменувань *A*, *B*, *C* займає відповідно 2, 1 і 3 кубічних метри. Імовірність попиту на ці вироби приведені в таблиці 10.13

Таблиця 10.13

| Кількість одиниць | Імовірність попиту | | |
|---|---|---|---|
| | Найменування А | Найменування В | Найменування С |
| 1 | 0,5 | 0,3 | 0,3 |
| 2 | 0,5 | 0,4 | 0,2 |
| 3 | 0,0 | 0,2 | 0,5 |
| 4 | 0,0 | 0,1 | 0,0 |

Вартість зберігання одиниці виробів найменувань *A*, *B*, *C* складає 48, 60 і 90 грн. відповідно. Скільки одиниць виробів кожного найменування слід зберігати у камері?

# РОЗДІЛ 1
# ТЕОРІЯ ІГОР І ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

## 9.4. Класифікація умов прийняття рішень

У попередніх розділах ми розглядали питання, пов’язані з математичним моделюванням ситуацій, у випадках, коли умови операції були визначені або містили стохастичну невизначеність (розділ 10), яка в принципі може бути врахована, якщо знати закони розподілу (або тільки числові характеристики) випадкових факторів задачі.

На практиці часто приходиться мати справу із задачами, в яких необхідно приймати рішення в умовах невизначеності, коли параметри, від яких залежить успіх операції, невідомі, і немає ніяких даних, які дозволяють судити про те, які їх значення більше, а які – менше імовірні.

Отже, оптимальність обраного рішення залежить від якості даних, які використовуються при описаній ситуації, в якій приймається рішення. З цієї точки зору процес прийняття рішень може належати до одних з трьох можливих умов.

1. Прийняття рішень в умовах *визначеності*, коли дані відомі точно.
2. Прийняття рішень в умовах *ризику* (*стохастичної невизначеності*), коли дані можна описати за допомогою імовірнісних розподілів.
3. Прийняття рішень в умовах *невизначеності*, коли даним не можна приписати відносні вагові коефіцієнти, які являли би ступінь їх значущості у процесі прийняття рішень.

По суті, в умовах визначеності дані надійно визначені, в умовах невизначеності вони не визначені. Це не означає, що в умовах невизначеності повністю відсутня інформація про задачу. Мова йде про те, що дані задачі важко або неможливо класифікувати за степенем значущості їх для прийняття рішення і що для цих даних, які розглядаються як реалізації випадкових величин або процесів, невідома або не може бути визначена функція розподілу або інші статистичні характеристики. Прийняття рішення в умовах ризику, отже, являє собою проміжний випадок.

### 9.5. Метод аналізу ієрархій

Моделі лінійного програмування є прикладом прийняття рішень в умовах визначеності. Ці моделі застосовані лише у тих випадках, коли альтернативні розв’язки можна зв’язати між собою точними лінійними функціями. У цьому параграфі розглянемо інший підхід до прийняття рішень в ситуаціях, коли, наприклад, для ідей, почуттів, емоцій визначаються деякі кількісні показники, що забезпечують числову шкалу віддання переваг для можливих альтернативних розв’язків. Цей підхід відомий як *метод аналізу ієрархій*.

Перед тим як викласти деталі даного методу, розглянемо приклад, який демонструє спосіб, за допомогою якого оцінюються різні альтернативні розв’язки.

---

**Приклад 11.1.** Випускник-відмінник середньої школи робить вибір серед трьох університетів *A*, *B* і *C* з метою отримання вищої освіти. Він сформулював два основних критерії: місцезнаходження університету і його академічна репутація. Будучи відмінним учнем, він оцінює академічну репутацію університету у п’ять разів вище, ніж його місцезнаходження. Це приводить до того, що репутації університету приписують вагу приблизно 83%, а його місцезнаходженню – 17%. Далі випускник використовує системний аналіз (сутність його викладається нижче) для оцінки трьох університетів з точки зору їх місцезнаходження і репутації. Проведений аналіз дає оцінки наведені у таблиці 11.1.

Таблиця 11.1

| | Університет | | |
|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | *C* |
| Місцезнаходження | 12,9% | 27,7% | 59,4% |
| Репутація | 54,5% | 27,3% | 18,2% |

*Розв'язання*. Структура задачі прийняття рішень приведена на рис. 11.1. Задача має єдиний ієрархічний рівень з двома критеріями (місцезнаходження і репутація) і три альтернативи (університети *A*, *B*, C).

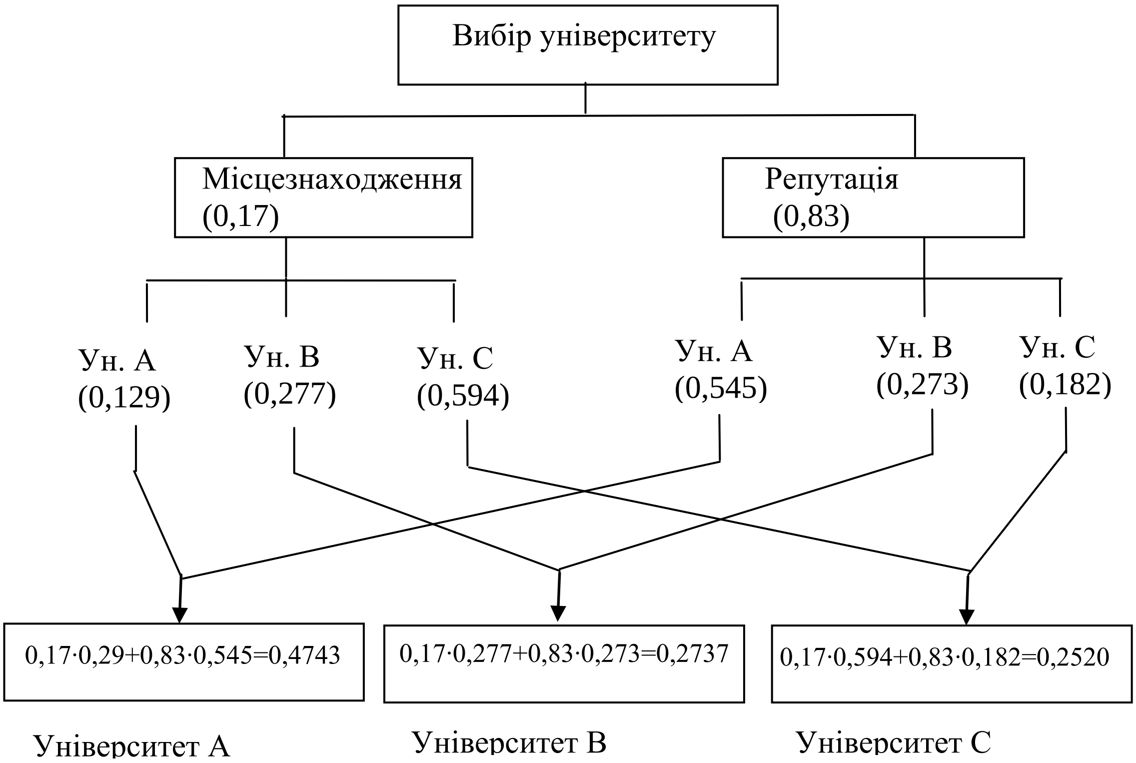



Рис. 11.1

Оцінка трьох університетів ґрунтується на обчислені комбінованого вагового коефіцієнта для кожного з них.

Університет А: 0,17·0,129+0,83·0,545=**0,4743**.

Університет В: 0,17·0,277+0,83·0,273=0,2737.

Університет В: 0,17·0,594+0,83·0,182=0,2520.

На основі цих обчислень університет А отримує найвищу комбіновану вагу і, отже, є найбільш оптимальним вибором учня.

---

Загальна структура метода аналізу ієрархій може містити декілька ієрархічних рівнів зі своїми критеріями.

Складність метода аналізу ієрархій полягає у визначені відносних вагових коефіцієнтів (таких, які були використані у прикладі 11.1) для оцінки альтернативних рішень. Якщо є $n$ критеріїв на заданому рівні ієрархії, відповідна процедура створює матрицю $A$ розмірності $n \times n$, яка називається *матрицею парних порівнянь*, та відображає висновки особи, що приймає рішення, відносно важливості різних критеріїв. Парне порівняння виконується таким чином, що критерій у стрічці $i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) оцінюється відносно кожного з критеріїв, які представлені $n$ стовпцями. Позначимо через $a_{ij}$ елемент матриці $A$, який знаходиться на перетині $i$-ї строки і $j$-го стовпця. У відповідності з методом аналізу ієрархій для опису згаданих оцінок використовуються цілі числа від 1 до 9. При цьому $a_{ij} = 1$ означає, що $i$-й і $j$-й критерії однаково важливі, $a_{ij} = 5$ відображає думку, що $i$-й критерій значно важливіший за $j$-й, а $a_{ij} = 9$ вказує на те, що $i$-й критерій надзвичайно важливіше $j$-го. Інші проміжні значення між 1 і 9 інтерпретуються аналогічно. Узгодженість таких позначень забезпечується наступною умовою: якщо $a_{ij} = d$, то автоматично $a_{ji} = 1/d$. Крім того, усі діагональні елементи $a_{ij}$ матриці $A$ повинні бути рівними 1, так як вони виражають оцінку критерію відносно самих себе.

---

**Приклад 11.2.** Покажемо, як визначається матриця порівняння $A$ для задачі прикладу 11.1.

*Розв'язання.* Почнемо з головного ієрархічного рівня, який має справу з критеріями академічної репутації університету і його місцем знаходження.

З точки зору випускника академічна репутація університету значно важливіша ніж його місцезнаходження. Отже, він надає елементу (1, 2) матриці $A$ значення 5, тобто $a_{12} = 5$. Це автоматично передбачає, що $a_{21} = 1/5$. Позначивши через $R$ і $L$ критерії репутації університету і його місцезнаходження, можна записати матрицю порівняння наступним чином.

$$A = \begin{array}{c} \\ R \\ L \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} R & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1/5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Відносні вагові коефіцієнти критеріїв $R$ і $L$ можуть бути визначені шляхом ділення елементів кожного стовпця на суму елементів цього ж стовпця. Отже, для нормалізації матриці $A$ ділимо елементи першого стовпця на величину $1+1/5=6/5$, елементи другого – на величину $5+1=6$. Шукані відносні вагові коефіцієнти $w_R$ і $w_L$ критеріїв обчислюються тепер як середні значення відповідних рядків нормалізованої матриці $A$. Отже,

$$N = \begin{array}{c} \\ R \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} R & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}83 & 0{,}83 \\ 0{,}17 & 0{,}17 \end{pmatrix} \end{array}$$

Середнє значення елементів рядків:

$$w_R = (0{,}83+0{,}83)/2 = 0{,}83;$$

$$w_L = (0{,}17+0{,}17)/2 = 0{,}17.$$

В результаті обчислень отримали $w_R = 0{,}83$ і $w_L = 0{,}17$, тобто ті вагові коефіцієнти, які показані на рис. 11.1. Стовпці матриці $N$ однакові, що має місце лише у випадку, коли особа, що приймає рішення, виявляє ідеальну узгодженість у визначені елементів матриці $A$. Ця теза детальніше обмірковується нижче.

Відносні вагові коефіцієнти альтернативних рішень, які відповідають університетам $A$, $B$ і $C$, обчислюються в межах кожного критерію $R$ і $L$ з використанням наступних двох матриць порівняння.

$$A_R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

Сума елементів стовпців дорівнює $(1{,}83; 3{,}67; 5{,}5)$,

$$A_L = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

Сума елементів стовпців дорівнює $(8; 3{,}5; 1{,}7)$.

Елементи матриць $A_R$ і $A_L$ визначені на основі міркувань випускника, які стосуються важливості трьох університетів.

При діленні елементів кожного стовпця матриць $A_R$ і $A_L$ на суму елементів цих же стовпців отримуємо наступні нормалізовані матриці.

$$N_R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}545 & 0{,}545 & 0545 \\ 0{,}273 & 0{,}273 & 0273 \\ 0182 & 0{,}182 & 0{,}182 \end{pmatrix} \end{array}, \quad N_L = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}143 & 0{,}118 \\ 0{,}250 & 0{,}286 & 0{,}294 \\ 0{,}625 & 0{,}571 & 0{,}588 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Середні значення елементів рядків матриці $N_R$ $w_{RA} = 0{,}545$, $w_{RB} = 0{,}273$ і $w_{RC} = 0{,}182$ дають відповідні вагові коефіцієнти для університетів А, В і С з точки зору академічної репутації. Аналогічно середні значення елементів рядків матриці $N_L$ $w_{LA} = 0{,}129$, $w_{LB} = 0{,}277$ і $w_{LC} = 0{,}594$ є відносними ваговими коефіцієнтами, які стосуються місцезнаходження університетів.

---

В прикладі 11.2 можна відмітити, що всі стовпці нормалізованих матриць $N$ і $N_R$ ідентичні, а стовпці матриці $N_L$ такими не є. Однакові стовпці вказують на те, що результуючі відносні вагові коефіцієнти зберігають одне й теж значення незалежно від того, як виконується порівняння. У цьому випадку кажуть, що вихідні матриці порівняння $A$ і $A_R$ є узгодженими. Отже, матриця $A_L$ не є узгодженою.

Узгодженість означає, що рішення буде узгоджене з визначеннями парних порівнянь критеріїв або альтернатив. З математичної точки зору узгодженість матриці $A$ означає, що $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ для всіх $i, j, k$. Наприклад в матриці $A_R$ з прикладу 11.2 $a_{13} = 3$ і $a_{12}a_{23} = 2 \cdot 3/2 = 3$. Властивість узгодженості вимагає лінійної залежності стовпців (і рядків) матриці $A$. Зокрема, стовпці будь-якої матриці порівнянь розмірністю $2 \times 2$ є залежними, і, отже, така матриця завжди є узгодженою. Не всі матриці порівнянь є узгодженими. Дійсно, взявши до уваги, що такі матриці будуються на основі людських міркувань, можна очікувати деяку степінь неузгодженості, і до неї слід відноситись терпляче при умові, що вона не виходить за певні „допустимі” межі.

Для того щоб з'ясувати, чи є рівень узгодженості „допустимим”, необхідно визначити відповідну кількісну міру для матриці порівнянь $A$. У прикладі 11.2 ми бачили, що ідеально узгоджена матриця $A$ приводить до нормалізованої матриці $N$, в якій всі стовпці однакові.

$$N = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що матриця порівнянь $A$ може бути отримана з матриці $N$ шляхом ділення елементів $i$-го стовпця на $w_i$ (цей процес обернений до знаходження матриці $N$ з $A$). Отже, отримуємо наступне:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо використати наведене визначення матриці $A$, то будемо мати

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

У компактній формі умова узгодженості матриці $A$ формулюється наступним чином. Матриця $A$ буде узгодженою тоді і тільки тоді, коли

$$A\vec{w} = n\vec{w},$$

де $\vec{w}$ – вектор-стовпець відносних вагових коефіцієнтів $w_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Коли матриця $A$ не є узгодженою, відносний ваговий коефіцієнт $w_i$ апроксимується середнім значенням $n$ елементів $i$-го рядка нормалізованої матриці $N$. Позначивши через $\langle \vec{w} \rangle$ обчислену оцінку (середнє значення), можна показати, що

$$A\langle\vec{w}\rangle = n_{\max}\vec{w},$$

де $n_{\max} \geq n$. В цьому випадку, чим ближче $n_{\max}$ до $n$, тим більше узгодженою є матриця порівнянь $A$. В результаті у відповідності з методом аналізу ієрархій обчислюється *коефіцієнт узгодженості* у вигляді

$$C_R = \frac{C_I}{R_I},$$

де

$C_I = \dfrac{n_{\max} - n}{n-1}$ – коефіцієнт узгодженості матриці $A$,

$R_I = \dfrac{1{,}98 \cdot (n-2)}{n}$ – стохастичний коефіцієнт узгодженості матриці $A$.

Стохастичний коефіцієнт узгодженості $R_I$ визначається емпіричним шляхом як середнє значення коефіцієнту $C_I$ для вибірки великого об'єму генерованих випадково матриць порівняння $A$.

Коефіцієнт узгодженості $C_R$ використовується для перевірки узгодженості матриці порівнянь $A$ наступним чином. Якщо $C_R \leq 0{,}1$, то рівень неузгодженості є припустимим. У протилежному випадку рівень неузгодженості матриці порівнянь $A$ є високим і особі, яка приймає рішення, рекомендується перевірити елементи парного порівняння $a_{ij}$ матриці $A$ з метою отримання більш узгодженої матриці.

Значення $n_{\max}$ обчислюється за допомогою матричного рівняння $A\langle\vec{w}\rangle = n_{\max}\vec{w}$, при цьому не важко помітити, що $i$-є рівняння цієї системи має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\langle w_j\rangle = n_{\max}\langle w_i\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n}\langle w_i\rangle = 1$, легко перевірити, що

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\langle w_j\rangle\right) = n_{\max}\sum_{i=1}^{n}\langle w_i\rangle = n_{\max}.$$

Це означає, що величину $n_{\max}$ можна визначити шляхом обчислення вектор-стовпця $A\langle\vec{w}\rangle$ з подальшим підсумовуванням його елементів.

**Приклад 11.3.** У прикладі 11.2 матриця $A_L$ є неузгодженою, так як стовпці матриці $N_L$ неоднакові. Треба дослідити узгодженість матриці $A_L$.

*Розв'язання.* Обчислимо значення $n_{\max}$. Використавши дані прикладу 11.2, маємо

$$\langle w_1\rangle = 0{,}129;\ \langle w_2\rangle = 0{,}277;\ \langle w_3\rangle = 0{,}594.$$

Отже,

$$A_L\langle\vec{w}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}129 \\ 0{,}277 \\ 0{,}594 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3863 \\ 0{,}8320 \\ 1{,}7930 \end{pmatrix}.$$

Звідки отримуємо

$$n_{\max} = 0{,}3863 + 0{,}8320 + 1{,}7930 = 3{,}0113.$$

Отже, для $n = 3$ маємо

$$C_I = \frac{n_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3{,}0113 - 3}{3 - 1} = 0{,}00565,$$

$$R_I = \frac{1{,}98 \cdot (n-2)}{n} = \frac{1{,}98 \cdot (3-2)}{3} = 0{,}66,$$

$$C_R = \frac{C_I}{R_I} = \frac{0{,}00565}{0{,}66} = 0{,}00856.$$

Так як $C_R < 0{,}1$, рівень неузгодженості матриці $A_L$ є допустимим.

## 9.6. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ

Якщо рішення приймається в умовах ризику (стохастична невизначеність), то вартості альтернативних рішень звичайно описуються імовірнісними розподілами. Задачі такого виду відносяться до задач теорії статистичних рішень, в яких невідомі умови операції залежать від об'єктивної дійсності, яку прийнято називати *природою*. Відповідні ситуації часто називають *іграми з природою*. *Природа* розуміється як деяка незацікавлена інстанція, поведінка якої невідома.

Розглянемо гру з природою: у особи (гравець), що приймає рішення, є $m$ можливих стратегій $A_1, A_2, \ldots, A_m$; що стосується обставин, то про них можна зробити $n$ припущень: $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Будемо розглядати їх як *стратегії природи*. Прибуток (дохід) гравця $a_{ij}$ при кожній парі стратегій $(A_i, S_j)$ задається *матрицею прибутків*:

| | $S_1$ | $S_2$ | ... | $S_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $a_{1n}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ... | $a_{2n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ... | $a_{mn}$ |

Треба вибрати таку стратегію гравця $A_i$, яка буде найбільш вигідною у порівнянні з іншими.

Введемо поняття *домінуючої стратегії*. Стратегія гравця $A_i$ називається *домінуючою* над стратегією $A_k$, якщо у рядку $A_i$ стоять прибутки не менші, ніж у відповідних клітинах рядку $A_k$ та з них принаймні один дійсно більший, ніж у відповідній клітині рядку $A_k$. Якщо всі прибутки рядку $A_i$ дорівнюють відповідним прибуткам рядку $A_k$, то стратегія $A_i$ називається *дублюючою стратегією* $A_k$.

Самий простий випадок вибору рішення у грі з природою – це випадок коли якась із стратегій гравця домінує над іншими. Наприклад, у матриці прибутків

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 2 | 3 | 5 |
| $A_2$ | 7 | 4 | 4 | 5 |
| $A_3$ | 3 | 4 | 4 | 1 |
| $A_4$ | 7 | 4 | 2 | 2 |

стратегія $A_2$ при будь-якому стані природи дає прибуток не менший, ніж при інших стратегіях, а при деяких станах – більший. Тут все зрозуміло, і треба обирати саме цю стратегію.

Якщо в матриці гри з природою немає жодної домінуючої над усіма іншими стратегіями, то корисно подивитись, чи немає в ній дублюючих стратегій і таких, які поступаються іншим при всіх умовах. Таким чином можна зменшити число стратегій гравця. Припустимо, що „чистка" матриці виконана, і ні дублюючих, ні явно невигідних гравцю стратегій в ній немає.

Прийняття рішення в умовах ризику ґрунтується на використанні *критерію очікуваного значення*, у відповідності з яким альтернативні рішення порівнюються з точки зору максимізації очікуваного прибутку або мінімізації очікуваних витрат.

Однак картина ситуації, яку дає матриця прибутків, неповна і не відображає належним чином переваги і недоліки кожного рішення. Бажано ввести такі показники, які не просто давали би прибуток при даній стратегії у кожній ситуації, але відображали би „удачливість" або „неудачливість" вибору даної стратегії у даній ситуації.

З цією метою в теорії рішень вводиться поняття *ризику*. *Ризиком* $r_{ij}$ гравця при використанні стратегії $A_i$ в умовах $S_j$ називається різниця між прибутком, який був би отриманий, якщо були б відомі умови $S_j$ і прибутком, який був би отриманий, коли ці умови невідомі і обрана стратегія $A_i$.

Очевидно, якби гравець знав стан природи $S_j$, то він би обрав ту стратегію, при якій прибуток максимальний. Цей прибуток, максимальний у стовпці $S_j$, позначимо $\beta_j$:

$$\beta_j = \max_i \{a_{ij}\}.$$

Щоб отримати ризик $r_{ij}$, треба від $\beta_j$ відняти фактичний прибуток $a_{ij}$:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}.$$

**Приклад 11.4.** Для прикладу візьмемо матрицю прибутків і побудуємо для неї матрицю ризиків.

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\
\hline
A_1 & 1 & 4 & 5 & 9 \\
A_2 & 3 & 8 & 4 & 3 \\
A_3 & 4 & 6 & 6 & 2 \\
\hline
\beta_j & 4 & 8 & 6 & 9
\end{array}
\; ; \quad (r_{ij}) = \;
\begin{array}{c|cccc|}
 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\
\hline
A_1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\
A_2 & 1 & 0 & 2 & 6 \\
A_3 & 0 & 2 & 0 & 7 \\
\hline
\end{array}$$

При погляді на матрицю ризиків стають зрозумілими деякі риси даної гри з природою. Так, в матриці прибутків у другому рядку перший і останній елементи були рівні між собою: $a_{21} = a_{24} = 3$. Однак ці прибутки зовсім не рівноцінні з точки зору вдалого вибору стратегії: при стані природи $S_1$ можна отримати самий більший прибуток 4, і вибір стратегії $A_2$ майже оптимальний; а ось при стані $S_4$ при обранні стратегії $A_1$ можна отримати на цілих 6 одиниць більше, тобто вибір стратегії $A_2$ зовсім невдалий. Ризик – це „платня за відсутність інформації”: $r_{21} = 1$, $r_{24} = 6$ (тоді як прибутки $a_{ij}$ в обох випадках однакові). Природно, бажано мінімізувати ризик, який супроводжує вибір рішення.

Отже, перед нами дві постановки задачі про вибір рішення: при одній бажано отримати максимальний прибуток, при другій – мінімальний ризик.

У даному параграфі ми розглядаємо стохастичну невизначеність, коли стани природи характеризуються імовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ і ці імовірності в задачі відомі. Тоді природно обрати ту стратегію, для якої середнє значення прибутку, яке взяте по рядку, максимальне:

$$a_i = p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \ldots + p_n a_{in} = \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij} \to \max .$$

Корисно відмітити, що стратегія, яка обертає у максимум середній прибуток, приводить до мінімуму і середній ризик:

$$r_i = p_1 r_{i1} + p_2 r_{i2} + \ldots + p_n r_{in} = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{ij} \to \min ,$$

так що у випадку стохастичної невизначеності обидва підходи (від прибутку і від ризику) дають одне і те ж оптимальне рішення.

Часто на практиці результат одного рішення приводить до необхідності прийняття наступного рішення і т. д. Цю послідовність прийняття рішень не можна виразити матрицею прибутків, тому доводиться використовувати інший алгоритм прийняття рішень.

Графічно подібні процеси можуть бути представлені за допомогою *дерева рішень*. Таке подання полегшує опис багатоетапного процесу прийняття управлінського рішення в цілому.

У наведеному прикладі 11.5 розглядається проста ситуація, яка пов’язана з прийняттям рішення при наявності скінченої кількості альтернатив і точних значень матриці прибутку.

---

**Приклад 11.5.** Припустимо, що деякий інвестор хоче вкласти на фондовій біржі 10 000 євро в акції однієї з двох компаній: *A* або *B*. Акції компанії *A* є ризикованими, але можуть принести 50% прибутку від суми інвестицій на протязі наступного року. Якщо умови фондової біржі будуть несприятливими, сума інвестиції може знецінитися на 20%. Компанія В забезпечує безпеку інвестицій з 15% прибутку в умовах підвищення котирування[7] на біржі і тільки 5% – в умовах зниження котирування. Всі аналітичні публікації, з якими можна познайомитись (а вони завжди є у кінці року), з імовірністю 60% прогнозують підвищення котирування і з імовірністю 40% – зниження котирування. В яку кампанію слід вкласти гроші?

*Розв'язання.* Інформація, яка пов'язана з прийняттям рішення, підсумована у таблиці 11.2.

Таблиця 11.2

| Альтернативне рішення | Прибуток від інвестицій за один рік, € | |
|---|---|---|
| | При підвищені котирування | При знижені котирування |
| Акції компанії *A* | 5 000 | – 2 000 |
| Акції компанії *B* | 1 500 | 500 |
| Імовірність події | 0,6 | 0,4 |

Задача може бути також представлена у вигляді дерева рішень, яке показане на рис. 11.2.

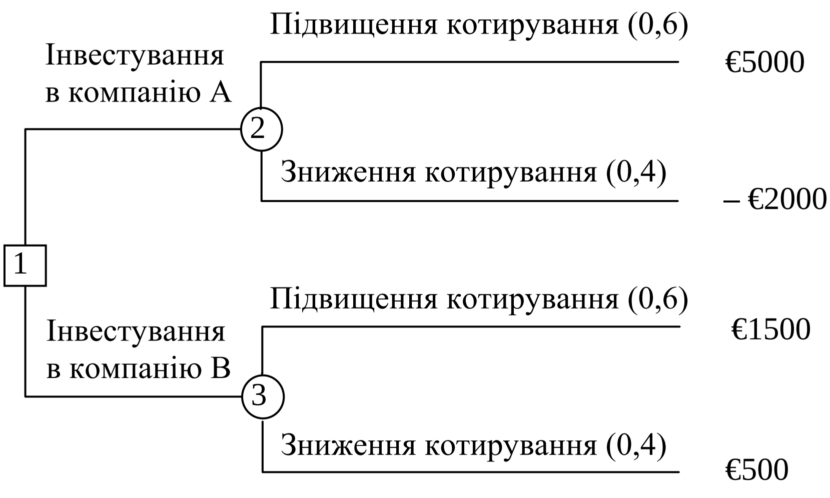



Рис. 11.2

На рис. 11.2 використовуються два типи вершин: квадрат представляє вершини, в яких приймається рішення, а коло – випадкову вершину (наслідок). Так як не можна впливати на появу наслідків, то в круглих

[7] Котирування – встановлення поточних цін на товари, курси валют і цінних паперів на ринках і біржах, а також публікація відомостей про встановлені ціни, курси і об'єми торгівлі.

вершинах обчислюють імовірності їх появи. Таким чином, із вершини 1 виходять дві вітки, які представляють альтернативи, пов'язані з покупкою акцій компанії *A* або *B*. Далі дві вітки, що виходять з випадкових вершин 2 і 3, відповідають випадкам підвищення і зниження котирування на біржі з імовірностями їх появи і відповідними прибутками.

Виходячи із схеми рис. 11.2, отримуємо очікуваний прибуток за рік для кожної з двох альтернатив.

Для акцій компанії *A*: $5000 \cdot 0{,}6 + (-2000) \cdot 0{,}4 = 2200$.

Для акцій компанії *B*: $1500 \cdot 0{,}6 + 500 \cdot 0{,}4 = 1100$.

Рішенням, яке ґрунтується на цих обчисленнях, є покупка акцій компанії *A*.

---

Розглянемо три модифікації критерію очікуваного значення. Перша полягає у визначені *апостеріорних імовірностей* на основі експерименту над досліджуваною системою, друга – у *корисності* реальної вартості грошей, а третя модифікує критерій очікуваного значення таким чином, що він може бути використаний для прийняття рішення при короткотерміновому плануванні.

***Апостеріорні імовірності Байєса***. Розподіли імовірностей, які використовуються при формуванні критерію очікуваного значення, одержуються, як правило, із накопиченої раніше інформації. В деяких випадках виявляється можливим модифікувати ці імовірності за допомогою поточної або отриманої раніше інформації, яка звичайно ґрунтується на дослідженні вибіркових (експериментальних) даних. Отримані імовірності будуть *апостеріорними* (Байєсовськими), на відміну від *апріорних*, які отримані з вихідної інформації. Наступний приклад показує, як критерій очікуваного значення можна модифікувати так, щоб скористатись новою інформацією, яка міститься у апостеріорних імовірностях.

---

**Приклад 11.6.** У прикладі 11.5 апріорні імовірності 0,6 і 0,4 підвищення і зниження котирування акцій на біржі були визначені із наявних публікацій фінансового характеру. Припустимо, що замість того щоб повністю покладатись на ці публікації, інвестор вирішив провести власне дослідження шляхом консультації з другом, який добре розуміється у питаннях, що стосуються фондової біржі. Друг висловлює загальну думку „за" або „проти" інвестицій. Ця думка в подальшому визначається кількісно наступним чином. При підвищенні котирування його думка з 90%-ю імовірністю буде „за", при зниженні котирування імовірність його думки „за" зменшиться до 50%. Яким чином можна одержати вигоду з цієї додаткової інформації?

*Розв'язання*. Думка друга фактично являє умовні імовірності „за–проти", при заданих станах природи у вигляді підвищення і зниження котирування. Введемо наступні позначення:

$v_1$ – думка „за", $v_2$ – думка „проти",

$m_1$ – підвищення котирування, $m_2$ – зниження котирування.

Думку друга можна записати у вигляді імовірнісних співвідношень наступним чином.

$$P(v_1 \mid m_1) = 0{,}9;\ P(v_1 \mid m_2) = 0{,}1;$$

$$P(v_2 \mid m_1) = 0{,}5;\ P(v_2 \mid m_2) = 0{,}5.$$

За допомогою цієї додаткової інформації задачу вибору рішення можна сформулювати наступним чином.

1. Якщо думка друга „за", акції якої компанії слід купувати – *A* або *B*?
2. Якщо думка друга „проти", то, знов-таки, – акції якої компанії слід купувати – *A* або *B*?

Задачу можна представити у вигляді дерева рішень, яке показане на рис. 11.3. Вузлу 1 тут відповідає випадкова подія, думка друга, з відповідними імовірностями „за" та „проти". Вузли 2 і 3 являють вибір між компаніями *A* і *B* при відомій думці друга „за" або „проти" відповідно. Вузли 4-7 відповідають випадковим подіям, які пов'язані з підвищенням або зниженням котирування.

Для оцінки різних альтернатив, які показані на рис. 11.3, необхідно обчислити апостеріорні імовірності $P(m_i \mid v_j)$, які вказані на відповідних вітках, та які виходять з вузлів 4-7. Ці апостеріорні імовірності обчислюються з урахуванням додаткової інформації, яка міститься в рекомендаціях друга, за допомогою наступних дій.

*Крок 1.* Умовні імовірності $P(v_j \mid m_i)$ для даної задачі запишемо наступним чином:

$$P(v_j|m_i) = \begin{array}{c|cc|} & v_1 & v_2 \\ \hline m_1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ m_2 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ \hline \end{array}$$

*Крок 2.* Обчислюємо імовірності сумісної появи подій:

$$P(m_i v_j) = P(v_j \mid m_i) \cdot P(m_i) \text{ для всіх } i \text{ та } j.$$

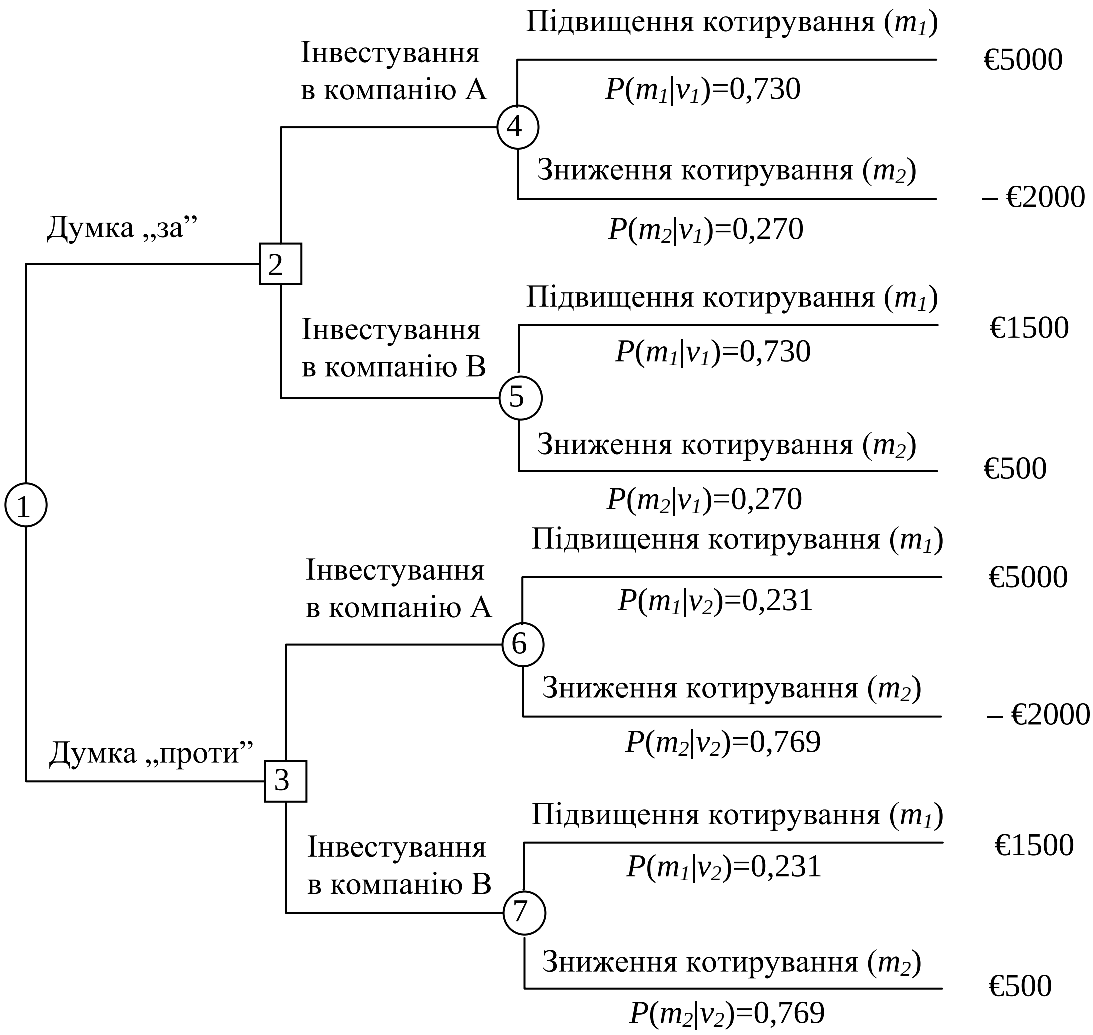



Рис. 11.3

При заданих апріорних імовірностях $P(m_1)=0{,}6$ і $P(m_2)=0{,}4$ імовірності сумісної появи подій визначаються множенням першого і другого рядків таблиці, яка отримана на кроці 1, на 0,6 і 0,4 відповідно. В результаті маємо наступне:

$P(m_i\, v_j)$ =

| | $v_1$ | $v_2$ |
|---|---|---|
| $m_1$ | 0,54 | 0,06 |
| $m_2$ | 0,20 | 0,20 |

Сума всіх елементів цієї таблиці дорівнює одиниці.

*Крок 3*. Обчислюємо абсолютні імовірності.

$$P(v_j)=\sum_{i=1}^{2} P(m_i v_j),\ \ j=1,2\,.$$

Ці імовірності одержуються шляхом сумування елементів відповідних стовпців таблиці, яка отримана на кроці 2. У результаті маємо наступне:

| $P(v_1)$ | $P(v_2)$ |
|---|---|
| 0,74 | 0,26 |

*Крок 4*. Визначаємо шукані апостеріорні імовірності за формулою

$$P\left(m_i \mid v_j\right) = \frac{P\left(m_i v_j\right)}{P\left(v_j\right)}.$$

Ці імовірності обчислюються діленням кожного стовпця таблиці, яка отримана на кроці 2, на елемент відповідного стовпця таблиці, обчисленої на кроці 3, що приводить до наступних результатів(округлені до трьох десяткових знаків):

$$P(m_i|v_j) = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \end{array} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{0{,}730} & \multicolumn{1}{c|}{0{,}231} \\ \multicolumn{1}{|c}{0{,}270} & \multicolumn{1}{c|}{0{,}769} \\ \hline \end{array}$$

Це ті імовірності, які показані на рис. 11.3. Вони відрізняються від вихідних апріорних імовірностей $P(m_1) = 0{,}6$ і $P(m_2) = 0{,}4$.

Тепер можна оцінити альтернативні рішення, які основані на очікуваних прибутках для вузлів 4-7.

*Думка „за”*.

Прибуток від акцій компанії А у вузлі 4:

$$5000 \cdot 0{,}730 + (-2000) \cdot 0{,}270 = 3110.$$

Прибуток від акцій компанії В у вузлі 5:

$$1500 \cdot 0{,}730 + 500 \cdot 0{,}270 = 1230.$$

*Рішення*: інвестувати у акції компанії А.

*Думка „проти”*.

Прибуток від акцій компанії А у вузлі 6:

$$5000 \cdot 0{,}231 + (-2000) \cdot 0{,}769 = -383.$$

Прибуток від акцій компанії В у вузлі 7:

$$1500 \cdot 0{,}231 + 500 \cdot 0{,}769 = 731.$$

*Рішення*: інвестувати у акції компанії В.

Відмітимо, що попередні рішення еквівалентні твердженню, що очікувані прибутки у вузлах 2 і 3 дорівнюють 3110 і 731 євро відповідно. Отже, при відомих імовірностях $P(v_1) = 0{,}74$ і $P(v_2) = 0{,}26$, які обчислені на кроці 3, можна обчислити очікуваний прибуток для всього дерева рішень.

---

У попередніх прикладах критерій очікуваного значення застосовувався лише у тих ситуаціях, де прибутки виражались у вигляді реальних грошей. Зустрічається багато випадків, коли при аналізі слід використовувати скоріше *корисність*, ніж реальну величину прибутків. Різні індивідуми виявляють різне відношення до ризику, тобто вони проявляють різну корисність по відношенню до ризику. Іншими словами різні люди по різному можуть інтерпретувати отримані при аналізі результати. Наприклад, при рівноімовірних можливостях при інвестуванні отримати прибуток або втратити інвестицію, обережний інвестор може не виразити бажання ризикувати, а інвестор, який іде на ризик, може зробити інвестицію.

Визначення корисності є суб'єктивним. Воно залежатиме від нашого відношення до ризику. Те, що процедура визначення корисності повністю визначається думкою особи, що приймає рішення, породжує сумнів відносно надійності отриманого результату. Процедура, зокрема, неявно передбачає, що особа, яка приймає рішення, є раціонально мислячою – вимога, яка не завжди може бути узгоджена з варіаціями у поведінці і настрої, що є типовим для людської особистості. У цьому відношенні особа, що приймає рішення повинна дотримуватись концепції корисності у широкому розумінні, у відповідності з якою грошові одиниці не повинні бути єдиним вирішальним фактором у теорії прийняття рішень.

## 9.7. Прийняття рішень в умовах невизначеності

Прийняття рішень в умовах невизначеності, як і в умовах ризику, вимагає альтернативних дій, яким відповідають прибутки, що залежать від випадкових станів природи. Однак імовірності станів природи або взагалі не існують, або не піддаються оцінюванню навіть наближено.

Матрицю прибутків в задачі прийняття рішень з $m$ можливими діями і $n$ станами природи можна представити наступним чином:

| | $S_1$ | $S_2$ | ... | $S_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $v(A_1,S_1)$ | $v(A_1,S_2)$ | ... | $v(A_1,S_n)$ |
| $A_2$ | $v(A_2,S_1)$ | $v(A_2,S_2)$ | ... | $v(A_2,S_n)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $A_m$ | $v(A_m,S_1)$ | $v(A_m,S_2)$ | ... | $v(A_m,S_n)$ |

Елемент $A_i$ являє собою $i$-є можливе рішення, а елемент $S_j$ – $j$-й стан природи. Прибуток, який пов'язаний з рішенням $A_i$ і станом $S_j$, дорівнює $v(A_i,S_j)$.

Отже, відміна між прийняттям рішення в умовах ризику і невизначеності полягає в тому, що в умовах невизначеності імовірнісний розподіл, який відповідає станам $S_j$ або невідомий, або не може бути визначений. Ця нестача інформації обумовила розвиток наступних критеріїв для аналізу ситуації, яка пов'язана з прийняттям рішення.

1. Критерій Лапласа.
2. Мінімаксний критерій.
3. Критерій Севіджа.
4. Критерій Гурвіца.

Ці критерії відрізняються ступенем консерватизму, який проявляє особа, що приймає рішення, перед лицем невизначеності.

***Критерій Лапласа*** спирається на *принцип недостатнього обґрунтування*, який полягає в тому, що оскільки розподіл імовірностей станів $P(S_j)$ невідомий, немає причин вважати їх різними. Отже, використовується оптимістичне припущення, що імовірності всіх станів природи імовірні між собою, тобто

$$P(S_1)=P(S_2)=\ldots=P(S_n)=1/n.$$

Якщо при цьому $v(A_i,S_j)$ – це отриманий прибуток, то найкращим рішенням буде те, яке забезпечує

$$\max_i\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}v(A_i,S_j)\right\}.$$

Якщо величина $v(A_i,S_j)$ – це витрати особи, що приймає рішення, то оператор „max” замінюється на „min”.

***Максимінний (мінімаксний) критерій*** ґрунтується на консервативній обережній поведінці особи, що приймає рішення, і зводиться до вибору найкращої альтернативи з найгірших. Якщо величина $v(A_i,S_j)$ – це прибуток, то у відповідності з максимінним критерієм в якості оптимального обирається рішення, яке забезпечує

$$\max_i\{\min v(A_i,S_j)\}.$$

Якщо величина $v(A_i,S_j)$ – втрати, використовується мінімаксний критерій, який визначається наступним співвідношенням

$$\min_i\{\max v(A_i,S_j)\}.$$

***Критерій Севіджа*** намагається зм’якшити консерватизм максимінного (мінімаксного) критерію шляхом заміни матриці прибутків матрицею ризиків

$$r(A_i,S_j)=\begin{cases}\max\limits_k\{v(A_k,S_j)\}-v(A_i,S_j), & \textit{якщо } v-\textit{прибуток}\\ v(A_i,S_j)-\min\limits_k\{v(A_k,S_j)\}, & \textit{якщо } v-\textit{втрати}\end{cases}.$$

***Критерій Гурвіца*** охоплює ряд різних підходів до прийняття рішення – від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного (консервативного). Нехай $0\le\alpha\le1$ і величини $v(A_i,S_j)$ – це прибутки. Тоді рішенню, яке вибране за критерієм Гурвіца, відповідає

$$\max_i \left\{ \alpha \max_j v\left(A_i, S_j\right) + (1-\alpha) \min_j v\left(A_i, S_j\right) \right\}.$$

Параметр $\alpha$ – *показник оптимізму*. Якщо $\alpha = 0$, критерій Гурвіца стає консервативним, так як його застосування еквівалентне застосуванню звичайного максимінного критерію. Якщо $\alpha = 1$, критерій Гурвіца стає надто оптимістичним, так як розраховує на найкращі з найкращих умов. Можна конкретизувати степінь оптимізму (або песимізму) відповідним вибором величини $\alpha$ з інтервалу $[0;1]$. При відсутності яскраво вираженої прихильності до оптимізму або песимізму вибір $\alpha = 0{,}5$ здається найбільш розумним.

Якщо величини $v\left(A_i, S_j\right)$ – це втрати, то критерій набуває наступного вигляду:

$$\min_i \left\{ \alpha \min_j v\left(A_i, S_j\right) + (1-\alpha) \max_j v\left(A_i, S_j\right) \right\}.$$

Вибір рішення в умовах невизначеності завжди суб’єктивний. І все ж таки математичні методи корисні і тут. Перш за все, вони дозволяють привести гру з природою до матричної форми, що далеко не завжди буває просто, особливо коли альтернативних рішень багато. Крім того, вони дозволяють за допомогою послідовного числового аналізу ситуації, отримати рекомендації щодо застосування того чи іншого рішення, і зробити остаточний вибір.

Якщо рекомендації, які отримані з різних критеріїв, співпадають – тим краще, це означає, що можна обирати рекомендоване рішення. Якщо ж, як це часто буває, рекомендації суперечать одне одному, треба з’ясувати наскільки до різних результатів вони приводять, уточнити свою точку зору і зробити остаточний вибір. Треба пам’ятати, що в будь-яких задачах обґрунтування рішень деяке свавілля неминуче – вже при побудові математичної моделі і виборі показника ефективності. Вся математика, що застосовується у дослідженнях, не відміняє цього свавілля, а дозволяє тільки „поставити його на своє місце”.

Розглянемо приклад застосування різних критеріїв при виборі рішення.

**Приклад 11.7.** Розглянемо приклад гри з природою, матриця вартостей подана у таблиці 11.3.

Таблиця 11.3

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 10 | 18 | 25 |
| $A_2$ | 8 | 7 | 12 | 23 |
| $A_3$ | 21 | 18 | 12 | 21 |
| $A_4$ | 30 | 22 | 19 | 15 |

Проаналізуємо ситуацію вибору стратегії, яка мінімізує вартості, з точки зору чотирьох розглянутих вище критеріїв.

*Критерій Лапласа.* При заданих імовірностях $P(S_j)=1/4$, $j=1,2,3,4$, очікувані значення вартостей для різних можливих рішень обчислюються наступним чином.

$$M(A_1)=\frac{1}{4}(5+10+18+25)=14{,}5;$$

$$M(A_2)=\frac{1}{4}(8+7+12+23)=12{,}5;$$

$$M(A_3)=\frac{1}{4}(21+18+12+21)=18;$$

$$M(A_4)=\frac{1}{4}(30+22+19+15)=21{,}5.$$

Оптимальна стратегія – $A_2$.

*Мінімаксний критерій.* Цей критерій використовує вихідну матрицю вартостей (таблиця 11.4).

Таблиця 11.4

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Максимум рядка |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 10 | 18 | 25 | 25 |
| $A_2$ | 8 | 7 | 12 | 23 | 23 |
| $A_3$ | 21 | 18 | 12 | 21 | 21 – мінімакс |
| $A_4$ | 30 | 22 | 19 | 15 | 30 |

Оптимальна стратегія – $A_3$.

*Критерій Севіджа.* Матриця ризиків визначається відніманням чисел 5, 7, 12 і 15 від елементів стовпців від першого до четвертого відповідно (таблиця 11.5).

Таблиця 11.5

| | | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | Максимум рядка |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | 0 | 3 | 6 | 10 | 10 |
| $r(A_i, S_j) =$ | $A_2$ | 3 | 0 | 0 | 8 | 8 – мінімакс |
| | $A_3$ | 16 | 11 | 0 | 6 | 16 |
| | $A_4$ | 25 | 15 | 7 | 0 | 25 |

Оптимальна стратегія – $A_2$.

*Критерій Гурвіца.* Результати обчислень містяться в таблиці 11.6.

Таблиця 11.6

| Альтернатива | Мінімум рядка | Максимум рядка | $\alpha$·(Мінімум рядка)+ +(1–$\alpha$ )·(максимум рядка) |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 25 | 25–20α |
| $A_2$ | 7 | 23 | 23–16α |
| $A_3$ | 12 | 21 | 21–9α |
| $A_4$ | 15 | 30 | 30–15α |

Використовуючи відповідне значення для $\alpha$, можна визначити оптимальну альтернативу. Наприклад, при $\alpha = 0{,}5$ оптимальними є або альтернатива $A_1$, або $A_2$, тоді як при $\alpha = 0{,}25$ оптимальним буде рішення $A_3$.

## 9.8. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ІГОР

Найбільш простими із ситуацій, які містять невизначеність, є так званні *конфліктні ситуації*, суть яких полягає в тому, що кілька сторін прагнуть досягти певних суперечливих, як правило, цілей, причому ступінь цього досягнення залежить від способу дій сторін, кожна з яких прагне максимізувати міру досягнення поставленої мети.

В економіці іноді приходиться мати справу з такими ситуаціями, коли при наявності багатьох учасників ефективність рішення одного з них залежить від того, які рішення прийняли інші учасники. Наприклад, доход підприємства від продажі виробів залежить не тільки від встановленої на них ціни, але і від кількості куплених покупцями виробів. Або при виборі асортименту товарів, які виготовляються підприємством, треба враховувати, який асортимент товарів випускають інші підприємства.

Побудовою математичних моделей конфліктних ситуацій і розробкою методів розв'язання виникаючих у цих ситуаціях задач займається *теорія ігор*. Кожна безпосередньо взята з практиці конфліктна ситуація дуже складна, та її аналіз ускладнений наявністю привхідних, несуттєвих факторів. Щоб зробити можливим математичний аналіз конфлікту, будується його математична модель.

*Грою* називається математична модель конфлікту, тобто сукупність деяких, певним чином впорядкованих правил, що реалізуються в діях двох чи більше осіб, які прагнуть досягти своїх цілей, виступаючи як учасники гри (*гравці*). Учасниками гри можуть бути як окремі індивідууми, так і цілі колективи (організації). *Ходом гри* називається вибір гравцем одного рішення з множини допустимих рішень, визначених правилами гри. Елементи визначеної правилами гри множини допустимих рішень кожного окремого гравця називаються його *стратегіями*. Отже, хід – це вибір гравцем однієї з своїх стратегій. З кожною стратегією зв'язаний *платіж*, який один з гравців виплачує іншим.

Ігри можна класифікувати згідно з деякими основними ознаками. Однією з них є кількість гравців. Гра, в якій беруть участь два гравці називається парною, множина гравців – множинною. Учасники множинної гри можуть утворювати коаліції (постійні або змінні). Множинна гра з двома постійними коаліціями, зрозуміло, перетворюється на парну.

В залежності від числа стратегій ігри діляться на *скінченні* і *нескінченні*. Гра називається скінченною, якщо у кожного гравця є у розпорядженні тільки скінченна кількість стратегій. У протилежному випадку гра називається нескінченною. Існують ігри (наприклад шахи), в яких у принципі кількість стратегій скінченна, але така велика, що повний їх перебір практично неможливий.

Якщо сума платежів всіх учасників гри дорівнює нулю, тобто виграші одних дорівнюють програшам інших, то така гра називається *грою з нульовою сумою*. Самий простий випадок – парна гра з нульовою сумою – називається *антагоністичною*. Теорія антагоністичних ігор – найбільш розвинутий розділ теорії ігор, з чіткими рекомендаціями.

Якщо кожен гравець має всю інформацію про попередні ходи, то така гра називається *грою з повною інформацією*. Всяка інша гра є *грою з неповною інформацією*.

*Оптимальною* називається стратегія, яка при багаторазовому повторені забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш. Метою теорії ігор є розробка способів відшукання оптимальних стратегій. Сукупність оптимальних стратегій всіх гравців називається *розв'язком гри*.

## 9.9. Методи розв'язування антагоністичних матричних ігор

Самим простим випадком, який детально розроблений у теорії ігор, є скінченна парна гра з нульовою сумою, тобто антагоністична гра двох учасників. Задача першого гравця – максимізувати свій виграш, задача другого гравця – мінімізувати свій програш або мінімізувати виграш першого. У такій грі достатньо задати результати у вигляді платежів для одного з гравців. При позначені гравців через $A$ і $B$ з кількістю стратегій $m$ і $n$ відповідно, гру звичайно представляють у вигляді матриці платежів гравцю $A$:

| | $B_1$ | $B_2$ | ... | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $a_{1n}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ... | $a_{2m}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ... | $a_{mn}$ |

Якщо така таблиця складена, то говорять, що гра приведена до матричної форми. Приведення гри до такої форми може являти собою важку задачу. Відмітимо, що якщо гра приведена до матричної форми, то багатоходова гра фактично зведена до одноходової – від гравця вимагається зробити тільки один хід: вибрати стратегію.

Оскільки гра антагоністична, оптимальним розв'язком її є одна або декілька таких стратегій для кожного з гравців. При цьому будь-яке відхилення від даних стратегій не покращує платіж тому чи іншому гравцю. Ці розв'язки можуть бути у вигляді єдиної *чистої* стратегії або декількох стратегій, які є *мішаними* у відповідності із заданими імовірностями. Приклади, розглянуті нижче, демонструють перераховані випадки.

---

**Приклад 11.8.** Розглянемо гру у матричній формі

Таблиця 11.7

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| $A_2$ | 1 | 8 | 4 | 3 | 4 |
| $A_3$ | 10 | 3 | 1 | 7 | 6 |
| $A_4$ | 4 | 5 | 3 | 4 | 8 |

*Розв'язування.* Будемо грати за гравця $A$. У матриці 11.7 є спокусливий для гравця $A$ виграш „10", тобто привабливо обрати стратегію $A_3$. Але супротивник може обрати стратегію $B_3$, і тоді гравець $A$ отримає жалюгідний виграш „1". Таким чином обирати стратегію $A_3$ не можна! Який же вибір зробити? Очевидно, виходячи із принципу обережності (це основний принцип теорії ігор), треба вибрати ту стратегію, при якій наш мінімальний виграш буде максимальним, тобто застосувати критерій максіміна.

Перепишемо таблицю 11.7 і у правому додатковому стовпці запишемо мінімальне значення виграшу кожного рядка $\alpha_i$ (таблиця 11.8).

Таблиця 11.8

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 2 |
| $A_2$ | 1 | 8 | 4 | 3 | 4 | 1 |
| $A_3$ | 10 | 3 | 1 | 7 | 6 | 1 |
| $A_4$ | 4 | 5 | 3 | 4 | 8 | $\boxed{3}$ |
| $\beta_j$ | 10 | 8 | $\boxed{5}$ | 7 | 8 | |

Оберемо ту стратегію, для якої $\alpha_i$ максимальне. Позначимо це максимальне значення через $\alpha$, тоді

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \alpha_i ,$$

і в нашому випадку $\alpha = 3$. Цьому значенню відповідає стратегія $A_4$. Обравши цю стратегію, ми у всякому разі можемо бути впевненими, що (при будь-якій поведінці супротивника) виграємо не менше, ніж 3. Ця величина наш гарантований виграш і називається *нижньою ціною гри*. Тепер станемо на місце супротивника. Очевидно обережний супротивник повинен обрати ту стратегію при якій максимальний виграш гравця $A$ мінімальний (мінімаксний критерій). Позначимо цю величину, яка називається *верхньою ціною гри*, через $\beta$. Отже,

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \beta_j .$$

В нашому прикладі $\beta = 5$ і досягається при стратегії супротивника $B_3$. Якщо другий гравець буде дотримуватись своєї мінімаксної стратегії, то він гарантований, що у будь якому випадку програє не більше $\beta$.

---

Для матричної гри справедлива нерівність

$$\alpha \le \beta .$$

Якщо $\alpha = \beta$, то така гра називається *грою із сідловою точкою*, а пара оптимальних стратегій $\left(A_{iopt}, B_{jopt}\right)$ –сідловою точкою матриці. В цьому випадку оптимальні стратегії гравців будуть стійкими по відношенню до інформації про поведінку іншого гравця. Елемент

$$\alpha = \beta = v$$

називається *ціною гри*. Якщо гра має сідлову точку, то кажуть, що вона розв’язується у *чистих стратегіях*.

Якщо платіжна матриця не має сідлової точки, тобто $\alpha < \beta$ (як в прикладі 11.8), то пошук розв’язку гри приводить до застосування складної стратегії, яка полягає у випадковому застосуванні двох і більше стратегій з певними частотами. Така складна стратегія називається *змішаною*.

Розглянемо приклад гри, яка розв’язується у чистих стратегіях.

---

**Приклад 11.9.** Матриця платежів задана в таблиці 11.9.

Таблиця 11.9

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 4 | 7 | 5 | 2 |
| $A_2$ | 7 | $\boxed{6}$ | 8 | 7 | $\boxed{6}$ |
| $A_3$ | 5 | 3 | 4 | 1 | 1 |
| $\beta_j$ | 7 | $\boxed{6}$ | 8 | 7 | |

В цьому прикладі ціна гри дорівнює $\alpha = \beta = 6$. Будь яке відхилення гравців від стратегій $A_2$ і $B_2$ може тільки погіршити їх положення, тому виграш гравця $A$ складатиме 6.

Наявність сідлової точки в грі – це далеко не правило, скоріше – виключення. Більшість ігор не має сідлової точки. Але є різновид ігор, які завжди мають сідлову точку, тобто розв'язуються у чистих стратегіях. В теорії ігор доводиться, що кожна гра з повною інформацією має сідлову точку. Будь-яка гра з повною інформацією, записана у матричній формі, має сідлову точку. Інша справа, що не завжди гру з повною інформацією можна привести до матричної форми. Скажімо, шахова гра є грою з повною інформацією, бо завжди закінчується виграшем білих, або завжди – виграшем чорних, або завжди – нічиєю, тільки чим самим ми поки не знаємо та навряд чи будемо знати і в доступному для огляду майбутньому бо кількість стратегій така велика, що привести її до матричної форми неможливо.

Змішані стратегії у теорії ігор являють модель змінної, гнучкої тактики, коли жоден з гравців не знає, як поведе себе супротивник. Розглянемо гру, матриця якої має розмірність $m \times n$, стратегії першого гравця задаються наборами імовірностей $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, з якими гравець застосовує свої чисті стратегії $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Ці набори можна розглядати як $m$-вимірні вектори, для координат яких

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \;\; p_i \geq 0 .$$

Аналогічно для другого гравця набори імовірностей, що відповідають чистим стратегіям $B_1, B_2, \ldots, B_n$, визначають n-вимірні вектори $\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, для координат яких

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \geq 0.$$

В основній теоремі теорії ігор стверджується, що кожна скінченна гра має, принаймні, один розв'язок, можливо, в області змішаних стратегій.

Застосування оптимальної стратегії дозволяє отримати виграш, що дорівнює ціні гри: $\alpha \leq v \leq \beta$.

Застосування першим гравцем оптимальної стратегії $\vec{p}_{opt}$ повинно забезпечити йому при будь-яких діях другого гравця виграш не менше ціни гри. Тому виконується співвідношення

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_{i\,opt} \geq v.$$

Аналогічно другому гравцю оптимальна стратегія $\vec{q}_{opt}$ повинна забезпечити при будь-яких стратегіях першого гравця, програш, який не перевищує ціну гри, тобто справедливе співвідношення

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_{j\,opt} \leq v.$$

Якщо платіжна матриця не містить сідлової точки, то задача визначення мішаної стратегії тим складніша, чим більша розмірність матриці. Тому матриці великої розмірності доцільно спростити, зменшивши їх розмірність шляхом викреслювання дублюючих і явно невигідних стратегій. Розглянемо приклад.

**Приклад 11.10.** Нехай платіжна матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{4\times5}.$$

Треба спростити платіжну матрицю.

*Розв’язання*. Знайдемо нижню та верхню ціни гри:

$$\alpha = \max\{2, 2, 3, 2\} = 3,$$

$$\beta = \min\{7, 6, 6, 4, 5\} = 4.$$

Так як $\alpha \neq \beta$, то необхідно застосовувати змішану стратегію. Спростимо платіжну матрицю.

Всі елементи стратегії $A_2$ менше або дорівнюють $A_3$, тобто стратегія $A_2$ явно невигідна для першого гравця та її можна виключити. Всі Елементи стратегії $A_4$ менше $A_3$, виключаємо $A_4$.

Для другого гравця порівнюючи стратегії $B_1$ і $B_4$, виключаємо $B_1$; порівнюючи $B_2$ і $B_4$, виключаємо $B_2$; порівнюючи $B_3$ і $B_4$, виключаємо $B_3$. В результаті отримуємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

---

У порадниках з теорії ігор звичайно зупиняються на розв’язуванні ігор розмірностей $2\times 2$, $2\times n$ та $m\times 2$, які допускають геометричну інтерпретацію. Графічний метод розв’язування ігор розглянемо трохи пізніше, а зараз покажемо як задачу розв’язання гри $m\times n$ можна звести до задачі лінійного програмування з $n$ обмеженнями-нерівностями і $m$ змінними.

Так як виграш першого гравця буде не меншим, ніж $v$, то математичну модель задачі для нього можна записати у вигляді:

$$z(\vec{p}) = v \to \max,$$

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geq v,$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \geq v,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \geq v,$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1,$$

$$p_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Розділимо нерівності основної системи обмежень на додатну величину $v$ та введемо позначення:

$$x_1 = \frac{p_1}{v},\ x_2 = \frac{p_2}{v},\ .\ .\ .\ .\ ,\ x_m = \frac{p_m}{v}.$$

Так як $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{v}$ і $\frac{1}{v} \to \min$, то для першого гравця отримуємо задачу лінійного програмування:

$$z(\vec{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to \min$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1,\\
&a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1,\\
&x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}$$

Для другого гравця математична модель записується у вигляді

$$w(y) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \to \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{aligned}
&a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq 1,\\
&a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leq 1,\\
&y_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,
\end{aligned}$$

де $w(y) = 1/v$, $y_j = q_j / v$.

Задача другого гравця є двоїстою до задачі першого гравця. Можна знайти розв'язок для одного з гравців, а потім за теоремами двоїстості – розв'язок для іншого.

Таким чином, розв'язання гри $m \times n$ еквівалентне розв'язанню задачі лінійного програмування і, навпаки, – для будь-якої задачі лінійного програмування може бути побудована еквівалентна їй задача теорії ігор. Цей зв’язок задач теорії ігор із задачами лінійного програмування виявляється корисним не тільки для теорії ігор, але і для лінійного програмування. Справа в тому, що існують наближені числові методи розв’язання ігор, які у деяких випадках (при великих розмірностях задачі) виявляються простішими, ніж класичні методи лінійного програмування. Наприклад, одним із самих простіших числових методів розв’язання ігор є *метод ітерацій* (або *метод Брауна-Робінсона*).

Як було сказано вище, графічний метод застосовується до розв’язання ігор, в яких хоча б один гравець має тільки дві стратегії.

Розглянемо гру $2 \times n$, в якій гравець $A$ має дві стратегії.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $q_1$ | $q_2$ | ... | $q_n$ |
| | | $B_1$ | $B_2$ | ... | $B_n$ |
| $p_1$ | $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $a_{1n}$ |
| $1-p_1$ | $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ... | $a_{2n}$ |

Гра передбачає, що гравець $A$ змішує стратегії $A_1$ і $A_2$ з відповідними імовірностями $p_1$ і $1-p_1$, а гравець $B$ змішує стратегії $B_1$, $B_2$, . . . , $B_n$ з імовірностями $q_1, q_2, \dots, q_n$ $(q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1)$. У цьому випадку очікуваний виграш гравця $A$, що відповідає $j$-й чистій стратегії гравця $B$, обчислюється за формулою

$$a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 = a_{1j} p_1 + a_{2j}(1 - p_1) = (a_{1j} - a_{2j}) p_1 + a_{2j}, \ \ j = 1, 2, \dots, n.$$

З формули видно, що очікуваний виграш першого гравця лінійно залежить від $p_1$. На осі абсцис відкладаємо імовірності $p_1$, а на осі ординат будуємо вирази очікуваних виграшів першого гравця.

Гравець $A$ повинен обрати такі стратегії, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто знайти величину $p_1$, яка максимізує вираз

$$\max_i \min_j \{(a_{1j} - a_{2j}) p_1 + a_{2j}\}.$$

Тому оптимальна змішана стратегія гравця $A$ визначається точкою перетину прямих, що максимізують його мінімальний очікуваний виграш.

Аналогічно знаходимо оптимальну стратегію гравця $B$. Вона визначається точкою перетину прямих, що мінімізують його максимальний очікуваний програш.

**Приклад 11.11.** Розглянемо гру $2 \times 4$, в якій платежі виплачуються гравцю $A$.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 2 | 3 | –1 |
| $A_2$ | 4 | 3 | 2 | 6 |

*Розв'язання.* Гра не має розв'язку у чистих стратегіях, і, отже, стратегії повинні бути змішаними. Очікувані виграші гравця $A$, що відповідають чистим стратегіям гравця $B$, наведені в таблиці 11.10.

Таблиця 11.10

| Чисті стратегії гравця $B$ | Очікувані виграші гравця $A$ |
|---|---|
| 1 | $-2p_1+4$ |
| 2 | $-p_1+3$ |
| 3 | $p_1+2$ |
| 4 | $-7p_1+6$ |

На рис. 11.4 зображені чотири прямі лінії, що відповідають чистим стратегіям гравця $B$.

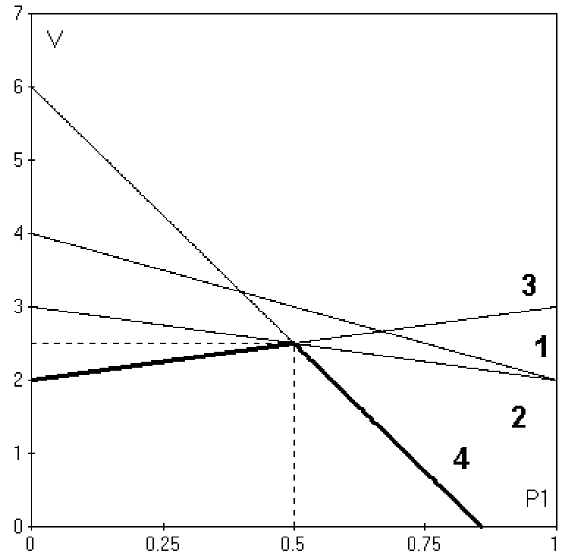



Рис. 11.4

Для того, щоб визначити найкращий результат із найгірших, побудована нижня обвідна (зображена на рис. 11.4 товстими лінійними сегментами), яка являє мінімальний виграш для гравця $A$ незалежно від того, що робить гравець $B$. Максимум нижньої обвідної відповідає максимінному розв’язку у точці $p^* = 0{,}5$. Ця точка визначається перетином прямих 3 і 4. Отже, оптимальним розв’язком для гравця $A$ є змішана стратегія, при якій застосовуються чисті стратегії $A_1$ і $A_2$ з імовірностями 0,5 і 0,5 відповідно. Відповідна ціна гри $v$ визначається підстановкою $p_1 = 0{,}5$ в рівняння або прямої 3, або 4, що приводить до наступного.

$v = 0{,}5 + 2 = 2{,}5$ (з рівняння прямої 3),

$v = -7 \cdot 0{,}5 + 6 = 2{,}5$ (з рівняння прямої 4).

Оптимальна змішана стратегія гравця $B$ визначається двома стратегіями, які визначають нижню обвідну графіка. Це означає, що гравець $B$ може змішувати стратегії $B_3$ і $B_4$, в цьому випадку $q_1 = q_2 = 0$ і $q_4 = 1 - q_3$. Отже, очікувані платежі гравця $B$, що відповідають чистим стратегіям гравця $A$, мають наступний вигляд $(a_{i3} - a_{i4})q_3 + a_{i4}$, $i = 1,2$ (таблиця 11.11).

| Чисті стратегії гравця $A$ | Очікувані платежі гравця $B$ |
|---|---|
| 1 | $4q_3 - 1$ |
| 2 | $-4q_3 + 6$ |

Найкращий розв’язок з найгірших для гравця $B$ являє собою точку мінімуму верхньої обвідної заданих двох прямих. Ця процедура еквівалентна розв’язанню рівняння

$$4q_3 - 1 = -4q_3 + 6.$$

Його розв’язком буде $q_3 = 7/8$, що визначає ціну гри $v = 4 \cdot (7/8) - 1 = 2{,}5$.

Отже, розв’язком гри для гравця $A$ є змішування стратегій $A_1$ і $A_2$ з рівними імовірностями 0,5 і 0,5 , а для гравця $B$ – змішування стратегій $B_3$ і $B_4$ з імовірностями $7/8$ і $1/8$. (Насправді гра має альтернативний розв’язок для гравця $B$, так як максимінна точка на рис. 11.4 визначається більш ніж двома прямими. Будь-яка опукла лінійна комбінація цих альтернативних розв’язків також є розв’язком задачі).

---

Для гри, в якій гравець $A$ має $m$ стратегій, а гравець $B$ – тільки дві, розв’язок знаходиться аналогічно. Головна відмінність полягає в тому, що в цьому випадку будуються графіки функцій, які являють очікувані платежі другого гравця, що відповідають чистим стратегіям гравця $A$. В результаті ведеться пошук мінімаксної точки верхньої обвідної побудованих прямих.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Назвіть три можливих умови прийняття рішень.
2. У чому полягає суть методу ієрархій?
3. Що таке вагові коефіцієнти і як вони визначаються?
4. Як визначається узгодженість матриці порівнянь?
5. У чому полягає зміст критерію очікуваного значення?
6. Які задачі теорії прийняття рішень називаються грою з природою?
7. Як можна представити задачу теорії прийняття рішень у вигляді дерева рішень?
8. Як визначаються апостеріорні імовірності Байєса?
9. За якими критеріями класифікуються задачі теорії ігор?
10. Методи розв’язування ігор з нульовою сумою.
11. Розв’язання матричних ігор у змішаних стратегіях.
12. Як можна звести задачу теорії ігор до задачі лінійного програмування?
13. Графічний метод розв’язування задач теорії ігор.
14. Які ще методи розв’язування задач теорії ігор Ви знаєте?

## Вправи

1. Відділ кадрів фірми після попереднього відбору звузив пошук майбутнього співробітника до трьох кандидатур: $K$, $L$ і $V$. Остаточний відбір заснований на трьох критеріях: співбесіда ($S$), досвід роботи ($D$) і рекомендації ($R$). Відділом кадрів використовується матриця $A$ для порівняння трьох критеріїв. Після проведеної співбесіди з трьома претендентами, збору даних, що відносяться до досвіду їх роботи і рекомендаціям, побудовані матриці $A_S$, $A_D$ і $A_R$. Якого з трьох кандидатів слід прийняти на роботу? Оцініть узгодженість даних.

$$A = \begin{array}{c} \\ S \\ D \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & D & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_S = \begin{array}{c} \\ K \\ L \\ V \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} K & L & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1/5 \\ 1/4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$A_D = \begin{array}{c} \\ K \\ L \\ V \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} K & L & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2 \\ 3 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_R = \begin{array}{c} \\ K \\ L \\ V \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} K & L & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Вирішивши купити автомобіль, людина зупинила свій вибір на трьох моделях: $A1$, $A2$ і $A3$. Факторами, які впливають на його рішення, є вартість автомобіля ($C$), вартість обслуговування ($O$), вартість поїздки по місту ($M$) і сільській місцевості ($S$). Таблиця 11.11 містить необхідні дані, які відповідають трьохрічному терміну експлуатації автомобіля.

Таблиця 11.11

| Модель | $C$ (€) | $O$ (€) | $M$ (€) | $S$ (€) |
|---|---|---|---|---|
| $A1$ | 6 000 | 1800 | 4500 | 1500 |
| $A2$ | 8 000 | 1200 | 2250 | 750 |
| $A3$ | 10 000 | 600 | 1125 | 600 |

Використайте вказані вартості для побудови матриць порівняння. Оцініть узгодженість матриць і визначите модель автомобіля, яку слід купити.

3. У грі „Колесо фортуни” колесо управляється електронним пристроєм за допомогою двох кнопок, які надають колесу сильне (В) або слабе (М) обертання. Само колесо поділено на рівні області білу (Б) і червону (Ч). У білій області колесо зупиняється з імовірністю 0,3, а у червоній – 0,7. Плата, яку отримує гравець, дорівнює (у гривнях):

| | Б | Ч |
|---|---|---|
| В | 800 | 200 |
| М | – 2500 | 1000 |

Представте задачу у вигляді дерева рішень.

4. Припустимо, що у інвестора є можливість вкласти гроші у три інвестиційних фонди відкритого типу: простий, спеціальний (що забезпечує максимальний довгостроковий прибуток від акцій малих компаній) і глобальний. Прибуток від інвестицій може змінюватись в залежності від умов ринку. Існує 10% імовірність, що ситуація на ринку цінних паперів погіршиться, 50% – що ринок залишиться поміркованим і 40% – ринок буде зростати. Таблиця 11.12 містить значення відсотків прибутку від суми інвестицій при трьох можливостях розвитку ринку.

Таблиця 11.12

| Альтернатива (фонди) | Відсоток прибутку від інвестицій (%) | | |
|---|---|---|---|
| | Спадаючий ринок | Поміркований ринок | Зростаючий ринок |
| Простий | +5 | +7 | +8 |
| Спеціальний | –10 | +5 | +30 |
| Глобальний | +2 | +7 | +20 |

Представте задачу у вигляді дерева рішень. Який фонд слід обрати?

5. Фірма може прийняти рішення про будівництво середнього або малого підприємства. Мале підприємство згодом можна розширити. Рішення визначається майбутнім попитом на продукцію, яку буде випускати підприємство. Будівництво середнього підприємства економічно виправдано при високому попиті. З іншого боку, можна побудувати мале підприємство і через два роки його розширити.

   Фірма розглядає дану задачу з перспективою на десять років. Аналіз ринкової ситуації показує, що імовірності високого і низького попиту рівні 0,75 і 0,25 відповідно. Будівництво середнього підприємства обійдеться у 5 млн. грн., малого – у 1 млн. грн. Витрати на розширення через два роки малого підприємства оцінюється у 4,2 млн. грн.

   Очікувані щорічні доходи для кожної з можливих альтернатив:

   - середнє підприємство при високому (низькому) попиті дає 1 (0,3) млн. грн.;
   - мале підприємство при низькому попиті – 0,2 млн. грн.;
   - мале підприємство при високому попиті на протязі десяти років – 0,25 млн. грн.;
   - розширене підприємство при високому (низькому) попиті – 0,9 (0,2) млн. грн.;
   - мале підприємство без розширення при високому попиті на протязі перших двох років і наступному низькому попиті за останні вісім років – 0,2 млн. грн.

   Визначить оптимальну стратегію фірми у будівництві підприємств за допомогою дерева рішень.

6. Фірма виготовляє дитячі костюми і сукні, що користуються попитом і реалізація яких залежить від стану погоди. Витрати фірми на протязі серпня-вересня на одиницю продукції складає: костюми –

28 грн., сукня – 7 грн. Ціна реалізації складає 50 і 15 грн. відповідно.

За даними спостережень за декілька попередніх років, фірма може реалізувати в умовах теплої погоди 1950 суконь і 610 костюмів, а при прохолодній погоді – 630 суконь і 1050 костюмів.

У зв'язку з можливими змінами погоди визначить стратегію фірми у випуску продукції, яка забезпечить їй максимальний прибуток від реалізації продукції. Задачу розв'язати графічним методом з використанням критерію Гурвіца, прийнявши показник оптимізму $\alpha = 0{,}5$.

7. У наближені посівного сезону фермер має чотири альтернативи:

$a_1$ – вирощувати кукурудзу,

$a_2$ – вирощувати пшеницю,

$a_3$ – вирощувати сою,

$a_4$ – використовувати землю під пасовисько.

Платежі, пов'язані з вказаними можливостями, залежатимуть від кількості опадів, які умовно можна поділити на чотири категорії:

$s_1$ – сильні опади,

$s_2$ – помірні опади,

$s_3$ – незначні опади,

$s_4$ – засушливий сезон.

Матриця платежів (у тис. грн.) оцінюється наступним чином:

Таблиця 11. 13

| | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | –20 | 60 | 30 | –5 |
| $a_2$ | 40 | 50 | 35 | 0 |
| $a_3$ | –50 | 100 | 45 | –10 |
| $a_4$ | 12 | 15 | 15 | 10 |

Що повинен посіяти фермер?

8. Один із $N$ верстатів повинен бути обраний для виготовлення $Q$ одиниць певної продукції. Мінімальна і максимальна потреба в продукції рівна $Q_{\min}$ і $Q_{\max}$. Виробничі витрати $V_i$ на виготовлення $Q$ одиниць продукції на верстаті $i$ містять фіксовані витрати $K_i$ і питомі витрати $c_i$ на виробництво одиниці продукції і виражаються формулою $V_i = K_i + c_i Q$. Розв'яжіть задачу за допомогою кожного з чотирьох критеріїв прийняття рішення в умовах невизначеності при наступних даних, припускаючи, що $1000 \le Q \le 4000$.

Таблиця 11.14

| Верстат $i$ | $K_i$ (грн.) | $c_i$ (грн./од.) |
|---|---|---|
| 1 | 100 | 5 |
| 2 | 40 | 12 |
| 3 | 150 | 3 |
| 4 | 90 | 8 |

9. Знайти оптимальну стратегію і ціну гри, якщо матриця платежів задана для гравця $A$

а) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -5 & 6 \\ -3 & -4 & -9 & -2 \\ 6 & 7 & -8 & -9 \\ 7 & 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 1 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 20 \end{pmatrix}$.

10. Вкажіть область значень для параметрів $p$ і $q$, при яких пара $(2,2)$ буде сідловою точкою у грі. Матриця платежів задана для гравця $A$

а) $\begin{pmatrix} 1 & q & 6 \\ p & 5 & 10 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 10 & 7 & q \\ 4 & p & 6 \end{pmatrix}$.

11. Вкажіть область, якій належить ціна гри, платежі задані для гравця $A$

а) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ -5 & -2 & 10 & -3 \\ 7 & 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 & 8 \\ -2 & 10 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 7 \\ 7 & -2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 0 & -6 \\ 6 & -9 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

12. Дві фірми виготовляють два конкуруючих товари. Кожен товар на даний час контролює 50% ринку. Покращивши якість товарів, обидві фірми збираються розгорнути рекламні компанії. Якщо вони не будуть цього робити, існуючий стан ринку не зміниться. Однак, якщо яка-небудь фірма буде більш активно рекламувати свої товари, то інша фірма втратить відповідний відсоток своїх споживачів. Дослідження ринку вказує, що 50% потенційних споживачів отримують інформацію через телебачення, 30% – через газети і 20% – через радіо. Сформулюйте задачу у вигляді гри двох гравців з нульовою сумою і оберіть відповідні засоби реклами для кожної фірми. Вкажіть інтервал значень, якому належить ціна гри. Чи може кожна фірма діяти з єдиною чистою стратегією?

13. Роздрібне торгове підприємство розробило декілька варіантів плану реалізації товарів на майбутньому ярмарку з урахуванням кон'юнктури ринку і попиту покупців. Показники прибутку, які отримуються від можливих їх комбінацій подані у таблиці 11.15.

Таблиця 11.15

| План продаж | Величина прибутку в залежності від попиту, млн. грн. | | |
|---|---|---|---|
| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
| $П_1$ | 2 | 1 | 3 |
| $П_2$ | 1 | 2 | 3 |
| $П_3$ | 2 | 3 | 1 |

Визначить: а) оптимальний план продаж товарів і ціну гри; б) якої стратегії слід дотримуватись торговому підприємству, якщо найбільш імовірною є ситуація: $C_1$ – 30%, $C_2$ – 30%, $C_3$ – 40%?

14. Розв'яжіть графічно наступні матричні ігри, платежі виплачуються гравцю $A$:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

15. Розв'яжіть матричну гру методами лінійного програмування:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

# РОЗДІЛ 10
# ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРОВАНОГО СЕРЕДОВИЩА MATHCAD ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

## 10.1. Основні характеристики MathCad

В даний час для науково-технічних розрахунків на комп'ютерах все частіше використовуються не традиційні мови програмування і не електронні таблиці, а спеціальні математичні програми типу Mathematica, MatLab, Mapl, MathCad, Gauss, Eureka, Reduce, Derive, Theorist, Macsyma та ін.

Математичні пакети, в особливості MathCad, дозволяють спеціалістам у конкретній науковій галузі дуже швидко засвоїти роботу на комп'ютері й реалізувати на них математичні моделі, і при тому не удаватися у тонкощі програмування на традиційних мовах (Fortran, Pascal, C, BASIC та ін.). Надзвичайна простота інтерфейсу MathCad зробила його одним з популярних і безумовно самим поширеним у студентському середовищі математичним пакетом.

З дидактичної точки зору, на нашу думку, MathCad є найбільш оптимальним для засвоєння студентами. Це пов'язано з тим, що, з одного боку, MathCad – це потужне і у той же час просте універсальне середовище для розв'язування задач у різних галузях науки і техніки, фінансів і економіки, фізики і астрономії, будівництві й архітектурі, математики і статистики, організації виробництва і управління... З другого боку, виконуючи рутинні або несуттєві (у контексті матеріалу, що вивчається) операції, пакет дозволяє студенту, який не володіє у повній мірі технікою математичних перетворень, самостійно виконувати громіздкі обчислення, розв'язувати змістовні задачі, набути стійких навиків розв'язування прикладних задач. При цьому студент спілкується з комп'ютером на рівні математичних понять, ідей, загальних підходів і за незначний час може розглянути самостійно багато прикладів. Ці властивості спілкування з обчислювальним середовищем особливо важливі для розвитку творчого, критичного і незалежного мислення, оскільки студент може всебічно досліджувати нові об'єкти, виділяти загальні закономірності та сформулювати узагальнюючі твердження на основі власних спостережень.

Крім того, пакет MathCad можна використовувати як засіб модернізації курсів, як середовище для спілкування студента з викладачем, як засіб контролю і самоконтролю, як інструмент допомоги студенту при самостійній роботі. При створені навчальних курсів MathCad допомогає викладачам підготувати змістовні динамічні ілюстрації, перенести акценти на концептуальні аспекти проблем, що вивчаються, збагатити курс прикладами, які виникають у різних галузях науки і практики, і які незвичайно не розглядаються в навчальних курсах внаслідок їх складності. Лекційні демонстрації можна підготувати таким чином, що кожен студент отримає стільки прикладів, скільки йому необхідно для зрозуміння суті питання. Для одного й того ж розділу можна підготувати самі різні за об'ємом, формою і глибиною навчальні курси.

Наведемо конкретні переваги роботи у середовищі MathCad:

- система MathCad більш доступна для масового користувача: вона у декілька разів дешевше своїх аналогів (мова йде про ліцензійні продукти);
- MathCad – це універсальна, а не спеціалізована математична система; так, для розв'язання складних задач у аналітичному вигляді краще застосовувати Mapl, а для розв'язання складних задач лінійної алгебри – MatLab і т. д.;
- математичні вирази у середовищі MathCad записуються у їх загальноприйнятій нотації: чисельник дробу знаходиться наверху, а знаменник – нанизу; у визначеному інтегралі межі інтегрування роз-

міщенні на своїх звичних місцях. Здавалось би, що це все дрібниці, які ніяк не впливають на обчислювальний процес. Але... Програма повинна бути зрозумілою не тільки комп'ютеру, але й людині. Користувач, читаючи роздруківку принтера або дивлячись на дисплей, бачить, що дана величина записана у чисельнику та її збільшення приводить до зростання всього виразу. А це дуже важливо при аналізі математичних моделей, форма і зміст яких єдині;

- у середовищі MathCad процес створення „програми" йде паралельно з її налагодженням. Користувач, після введення нового виразу у MathCad-документ, може не тільки відразу підрахувати, чому він дорівнює при певних значеннях змінних, але й побудувати графік або поверхню, побіжний погляд на які може безпомилково вказати, де таїться помилка, якщо вона була допущена при введені формул або при створенні самої математичної моделі;
- у пакет MathCad інтегрований достатньо потужний математичний апарат, який дозволяє розв'язувати проблеми без виклику зовнішніх процедур;
- пакет MathCad має довідник по основним математичним і фізико-хімічним формулам і константам, які можна автоматично переносити у документ без побоювання внести в них спотворення, які, на жаль, не рідкість при ручній роботі;
- до пакету MathCad можна придбати ті чи інші електронні підручники з різних дисциплін (наприклад, статистики, теорії управління);
- розв'язуючи задачу, користувач може вводити не тільки числові значення змінних, але й доповнювати їх розмірностями. При цьому користувач може обрати і систему одиниць;
- система MathCad обладнана засобами анімації, що дозволяє реалізовувати створені моделі не тільки у статиці (числа, таблиці, графіки), але й у динаміці (анімаційні кліпи);

- в систему MathCad інтегровані засоби символьної математики, що дозволяє розв'язувати задачі не тільки чисельно, але й аналітично;
- не виходячи із середовища MathCad, можна відкривати нові документи на інших серверах і користуватись тими перевагами інформаційних технологій, які надає Internet.

Система MathCad існує у трьох основних варіантах:

1. MathCad Standart – стандартна версія; ідеальна система для повсякденних розрахунків. Розрахована для масової аудиторії та широкого використання в навчальному процесі.
2. MathCad Professional – версія для професіоналів; промисловий стандарт прикладного використання математики у технічних додатках. Орієнтована на математиків і наукових співробітників, які виконують складні і трудомісткі розрахунки. Це найбільш повна і потужна версія.
3. MathCad Professional Academic – професіональне академічне видання; пакет програм для професійного використання математичного апарату з електронними посібниками і ресурсами, але за спеціальною ціною для освітніх цілей.

## 10.2. Початок роботи у середовищі MathCad

Після завантаження програми з'являється вікно MathCad, верхній рядок якого – стандартний рядок windows-додатку.

Все, що розміщено нижче, відноситься до роботи у середовищі пакета.

Другий рядок екрану – рядок меню.

Меню має набір стандартних пунктів для windows-додатків: **File** (Файл), **Edit** (Редактировать), **View** (Вид), **Format** (Формат), **Windows** (Окно), **Help** (Помощь) і специфічні для MathCad пункти: **Insert** (Вставка), **Math** (Математика), **Symbolics** (Символы). У дужках вказані назви пунктів меню у російській редакції MathCad.

Наступні три рядка вікна містять панелі інструментів, частина з яких – стандартні для windows-додатків операції роботи з файлами і текстом, а інша – специфічні функції MathCad, наприклад, кнопка з надписом $f(x)$ відкриває список вмонтованих функцій.

В окремому рядку звичайно розташовують панель інструментів для виконання математичних операцій, яку ще називають панеллю математичних інструментів або панеллю математичних операцій.

Математичні операції в MathCad розділені на групи і кожна кнопка панелі математичних інструментів відкриває доступ до певної групи операцій – клацання по кнопці цієї панелі відкриває іншу, додаткову, панель, на якій власно і розміщені кнопки математичних операцій відповідної групи.

Під рядками панелей інструментів знаходиться вікно робочого документа MathCad – простір, в якому розташовуються всі введені команди і вирази, куди MathCad виводить результати обчислень, графіки і, де розміщуються текстові коментарі. Зміст цього вікна можна редагувати, форматувати, зберігати у файлах на диску, друкувати та ін.

Останній, нижній рядок вікна – рядок стану. У ньому наведені рекомендації до подальших дій, поточний стан середовища і номер сторінки, яка відображена на екрані робочого документа.

Читач, який має навички роботи з windows-додатками відразу зрозуміє специфіку інтерфейсу MathCad.

Для початку роботи у середовищі клацніть у будь-якому місці в робочому документі – у полі з'явиться хрестик, який відмічає позицію, з якої починається введення.

Наведемо простіші принципи організації інтерфейсу і роботи MathCad:

- формули відображаються на екрані у загальноприйнятій математичній нотації;
- правильно визначається порядок дій;

- після введення знаку рівності справа від нього відображається результат обчислень;
- після введення знаку ділення MathCad вказує чорною міткою позицію для введення знаменника;
- при введені виразу у робочому документі виділяється обмежене прямокутником поле введення;
- введений вираз можна змінити (відредагувати) і отримати обчислене значення нового виразу, якщо клацнути мишею зовні виділеної рамки;
- можна вилучити будь-який фрагмент робочого документу.

Важливо пам'ятати, що MathCad читає і виконує введені операції зліва направо і зверху донизу, тому слідкуйте, щоб вираз для обчислень розташовувався правіше або нижче визначених для нього значень змінних.

Більшість обчислень в MathCad можна виконувати трьома способами:

- вибором операції в меню;
- за допомогою кнопкових панелей інструментів;
- звертанням до відповідних функцій.

Майже всі операції, що закріплені за пунктами меню, дублюються відповідними кнопками панелі інструментів. Для звертання до вмонтованої функції можна вставити функцію в робочий документ, якщо вибрати потрібне ім'я зі списку функцій, можна ввести ім'я функції з клавіатури або, для найчастіше використовуваних функцій, вставити ім'я функції клацанням по кнопці на панелі інструментів.

Для більш детального ознайомлення з основами роботи у середовищі MathCad можна звернутись до спеціалізованих посібників, наприклад [12, 15].

## 10.3. Розв’язання задач лінійного програмування

***Загальна задача лінійного програмування***.

Розглянемо приклад 4.4 з розділу 4.

Введемо цільову функцію:

$$z(x) := 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4$$

*Зауваження*. За умовчанням початкові індекси векторів і матриць в MathCad дорівнюють нулю. Для того щоб встановити значення початкового індексу одиниця (як прийнято в задачах математичного програмування), треба відкрити пункт **Математика** (**Math**) головного меню, а потім пункт падаючого меню **Параметры** (**Options**). Вікно діалогу має вкладку **Переменные** (**Built-in Variables**), в якій у рядку **Начальный индекс массивов** (**ORIGIN**) необхідно встановити значення **1**.

Введемо початкове значення компонентів вектору $\vec{x}$ (можна ввести лише значення для останньої компоненти):

$$x_4 := 0$$

Для розв’язання задачі у середовищі MathCad введемо ключове слово Given і систему обмежень:

$$\begin{aligned}&\text{Given}\\&x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 6\\&4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10\\&-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \le 14\\&x \ge 0\end{aligned}$$

Введемо ім’я шуканого вектора оптимального розв’язку, наприклад $x_{\min}$, знак надавання та ім’я вмонтованої функції, яка забезпечує мінімізацію цільової функції – **minimize**:

$$\text{xmin} := \text{Minimize}(z, x)$$

*Зауваження*. У іменах середовища MathCad не застосовуються нижні та верхні індекси.

Далі визначається шуканий розв'язок і значення цільової функції:

$$xmin = \begin{pmatrix} 2.769231 \\ 0 \\ 0 \\ 1.076923 \end{pmatrix} \qquad z(xmin) = -2$$

.

Отже, у середовищі MathCad задача має вигляд:

$$z(x) := 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4$$

$$x_4 := 0$$

Given

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 6$$

$$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \le 14$$

$$x \ge 0$$

$$xmin := \text{Minimize}(z, x)$$

$$xmin = \begin{pmatrix} 2.769231 \\ 0 \\ 0 \\ 1.076923 \end{pmatrix} \qquad z(xmin) = -2$$

.

*Зауваження.* Для того, щоб задати точність обчислень необхідно відкрити пункт головного меню **Формат** (**Format**), а потім клацнути по пункту **Результат...** (**Result...**) і у вікні діалогу на вкладці **Формат чисел** (**Number Format**) встановити кількість знаків після крапки у рядку **Число знаков** (**Number of decimal places**).

Якщо система обмежень задачі лінійного програмування приведена до першої або другої стандартної форм, то у середовищі MathCad можна застосувати розв'язування у матричній формі. Алгоритм такого розв'язування покажемо на прикладі 4.5 розділу 4.

Після введення цільової функції

$$z(x) := 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 ,$$

запишемо матрицю коефіцієнтів системи рівностей. Для цього задамо ім'я матриці, наприклад **M,** та знак надавання і у вікні діалогу **Матрицы** (**Matrix**), яке можна вивести за допомогою панелі математичних інструментів або пункту головного меню **Вставка** (**Insert**), натиснемо відповідний пункт. З'явиться вікно діалогу **Вставка Матрицы** (**Insert Matrix**), у якому введемо необхідну кількість рядків та стовпців. Вікно діалогу **Вставка Матрицы** (**Insert Matrix**) можна вивести за допомогою комбінації клавіш **Ctrl+M**. Після цього встановимо покажчик миші у мітку шаблону матриці і введемо відповідні коефіцієнти системи рівностей:

$$M := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введемо вектор вільних членів системи обмежень як матрицю, в якій кількість стовпців дорівнює одиниці:

$$b := \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Введемо початкове значення останньої компоненти вектору розв'язків:

$$x_4 := 0.$$

Введемо ключове слово Given, систему обмежень у матричній формі й умову невід'ємності розв'язків:

$$\text{Given} \qquad M \cdot x = b \qquad x \geq 0.$$

*Зауваження*. Знак рівності у системі обмежень є знаком бульових операцій (жирний знак рівності). Його можна ввести за допомогою комбінації клавіш **Ctrl+=** або у вікні діалогу **Булевы опера...** (**Boolean**).

Далі вводиться вмонтована функція максимізації і виводиться оптимальний розв'язок. Отже, вигляд розв'язування задачі у середовищі MathCad наступний:

$$z(x) := 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4$$

$$M := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$x_4 := 0$$

$$\text{Given} \qquad M \cdot x = b \qquad x \ge 0$$

$$xmax := \text{Maximize}(z, x)$$

$$xmax = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z(xmax) = 14$$

.

***Розв'язування розподільчих задач***.

Розв'яжемо у середовищі MathCad транспортну задачу з прикладу 6.2 розділу 6.

Задамо критерій оптимізації – цільову функцію:

$$\begin{aligned} z(x11, x12, x13, x14, x21, x22, x23, x24, x31, x32, x33, x34) := {} & 6 \cdot x11 + 8 \cdot x12 \ \ldots \\ & + 15 \cdot x13 + 4 \cdot x14 \ .. \\ & + 9 \cdot x21 + 15 \cdot x22 \ .. \\ & + 2 \cdot x23 + 3 \cdot x24 \ \ldots \\ & + 6 \cdot x31 + 12 \cdot x32 \ .. \\ & + 7 \cdot x33 + 10 \cdot x34 \end{aligned}$$

*Зауваження.* Якщо математичний вираз довгий, можна застосувати додавання з переносом на наступний рядок за допомогою комбінації клавіш **Ctrl+Enter**.

Для розв'язання задачі використаємо блок функцій **Given...Minimize**. Далі поданий розв'язок задачі у середовищі MathCad.

$$z(x11,x12,x13,x14,x21,x22,x23,x24,x31,x32,x33,x34) := 6\cdot x11+8\cdot x12 \ldots$$
$$+15\cdot x13+4\cdot x14 \ldots$$
$$+9\cdot x21+15\cdot x22 \ldots$$
$$+2\cdot x23+3\cdot x24 \ldots$$
$$+6\cdot x31+12\cdot x32 \ldots$$
$$+7\cdot x33+10\cdot x34$$

$x11:=0 \quad x12:=0 \quad x13:=0 \quad x14:=0 \quad x21:=0 \quad x22:=0 \quad x23:=0$

$x24:=0 \quad x31:=0 \quad x32:=0 \quad x33:=0 \quad x34:=0$

Given

$x11+x12+x13+x14=60 \quad x11+x21+x31=30 \quad x11\geq 0 \quad x12\geq 0$

$x21+x22+x23+x24=130 \quad x12+x22+x32=80 \quad x21\geq 0 \quad x22\geq 0$

$x31+x32+x33+x34=90 \quad x13+x23+x33=60 \quad x31\geq 0 \quad x32\geq 0$

$x14+x24+x34=110$

$x13\geq 0 \quad x14\geq 0 \quad x23\geq 0 \quad x24\geq 0 \quad x33\geq 0 \quad x34\geq 0$

$$\begin{pmatrix} x11\\ x12\\ x13\\ x14\\ x21\\ x22\\ x23\\ x24\\ x31\\ x32\\ x33\\ x34 \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(z, x11,x12,x13,x14,x21,x22,x23,x24,x31,x32,x33,x34)$$

$$\begin{pmatrix} x11 & x12 & x13 & x14\\ x21 & x22 & x23 & x24\\ x31 & x32 & x33 & x34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 40\\ 0 & 0 & 60 & 70\\ 30 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z(x11,x12,x13,x14,x21,x22,x23,x24,x31,x32,x33,x34) = 1.55\times 10^{3}$$

*Зауваження.* Ми вже знаємо, що ця задача має альтернативні розв'язки. Як у середовищі MathCad отримати хоча б один альтернативний розв'язок, для того щоб потім можна було записати загальний розв'язок задачі?

Після розв'язання будь-якої задачі транспортного типу перевіряють її на наявність альтернативного розв'язку. Це можна зробити наступним чином. Треба вибрати який-небудь рядок чи стовпець у матриці розв'язку, (якщо розмірності рядків і стовпців різні, то обирають з більшою). Наприклад, в нашій задачі оберемо перший рядок.

В системі обмежень послідовно будемо змінювати обмеження за знаком на умову, що виключає значення, яке присутнє у розв'язку. Отже для першого елементу обраного рядка замінюємо $x11 \geq 0$ на $x11 \neq 0$ та отримуємо новий розв'язок (*зауваження*: при такій заміні MathCad може дати повідомлення про помилку, але результат обчислень буде виведений):

$$\begin{pmatrix} x11 & x12 & x13 & x14 \\ x21 & x22 & x23 & x24 \\ x31 & x32 & x33 & x34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 & 80 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 & 70 \\ 90 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Цей розв'язок не є допустимим, так як є від'ємні елементи.

Переходимо до наступного елементу (попередню зміну необхідно повернути назад), тобто замінюємо $x12 \geq 0$ на $x12 \neq 20$ та отримуємо альтернативний розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x11 & x12 & x13 & x14 \\ x21 & x22 & x23 & x24 \\ x31 & x32 & x33 & x34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 110 \\ 30 & 20 & 40 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Маючи два альтернативні розв'язки можна побудувати загальний розв'язок так, як показано у розділі 6 (приклад 6.2).

## 10.4. Розв’язання задач нелінійного програмування

При розв’язанні задач нелінійного програмування традиційний симплекс-метод часто виявляється безсилим. Отже, розв’язання задач нелінійного програмування за допомогою вмонтованих функцій **Maximize**, **Minimize** може привести до трьох результатів:

1. Розв’язок знайдено.
2. Розв’язок не знайдено.
3. MathCad намагається підсунути користувачу результат, який тільки здалеку нагадує оптимальний розв’язок.

Наведемо деякі поради по роботі з функціями **Maximize**, **Minimize**:

1. Після того, як знайдений розв’язок, примусить MathCad знайти його ще раз, але вже з іншими початковими значеннями змінних.
2. Перед розв’язуванням задачі оптимізації з обмеженнями спочатку оцініть область допустимих розв’язків. З цією метою за допомогою функції Find знайдіть якщо не всі, то хоч деякі вершини многогранника розв’язків.
3. Починайте пошук оптимального розв’язку з початковими значеннями змінних, що відповідають однієї з точок, які знайдені у пункті 2.
4. Вводьте обмеження поступово: ввели перше – знайшли якийсь розв’язок, ввели друге – уточнили його і т. д.
5. Розв’язування задач цілочислового програмування починайте без обмежень на цілочислове значення змінних.

Розв’яжемо засобами середовища MathCad задачу опуклого програмування з прикладу 8.8 розділу 8.

$$f(x1, x2, x3) := x1^2 + x2^2 + x3^2$$

$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad x3 := 0$

Given

$2 \cdot x1 + x2 \le 5 \qquad x1 + x3 \le 2 \qquad x1 \ge 1 \qquad x2 \ge 2 \qquad x3 \ge 0$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(f, x1, x2, x3)$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(x1, x2, x3) = 5$$

.

MathCad відразу дало оптимальний розв'язок (ми вже знали правильну відповідь), а, взагалі, завжди необхідно знайти хоч ще один розв'язок з іншими початковими значеннями змінних. Покажемо, як це робиться на прикладі 8.2.

Якщо початкові значення змінних

$$x1 := 0 \qquad x2 := 0,$$

то середовище MathCad дає наступний розв'язок:

$z(x1, x2) := (x1 - 2)^2 + (x2 - 3)^2$

$x1 := 0 \quad x2 := 0$

Given

$x1 + 2 \cdot x2 \le 12 \quad x1 + x2 \le 9 \quad x1 \ge 0 \quad x2 \ge 0$

$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \mathrm{Maximize}(z, x1, x2)$

$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$z(x1, x2) = 13$

.

Змінимо початкові значення змінних, але перед цим, за допомогою вмонтованої функції **Find,** знайдемо одну з вершин многокутника допустимих розв'язків:

$x1 := 0 \quad x2 := 0$

Given

$x1 + 2 \cdot x2 = 12 \quad x1 + x2 = 9$

$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x1, x2)$

$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

.

Для знаходження нового розв'язку задачі в якості початкових значень змінних візьмемо отримані координати вершини многокутника розв'язків:

$$z(x1, x2) := (x1 - 2)^2 + (x2 - 3)^2$$

$x1 := 6 \qquad x2 := 3$

Given

$x1 + 2 \cdot x2 \le 12 \qquad x1 + x2 \le 9 \qquad x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \mathrm{Maximize}(z, x1, x2)$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z(x1, x2) = 58$$

.

Ми отримали новий розв'язок, який краще за попередній (ми вже знаємо, що він і є оптимальним).

Отже, при розв'язуванні задач нелінійного програмування завжди користуйтесь порадами даного параграфу.

## Питання для самоконтролю

1. Які вмонтовані функції середовища MathCad використовуються для відшукання розв’язків задач лінійного програмування?
2. Що необхідно задати перед застосуванням блоків розв’язання задач оптимізації у середовищі MathCad?
3. Яке ключове слово треба ввести при наявності обмежень?
4. Які особливості розв’язування задач нелінійного програмування за допомогою середовища MathCad?

## Вправи

При розв’язуванні задач попередніх розділів використовуйте додатково середовище MathCad.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: Видавничий центр „Академія”, 2003. – 520 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Учеб. пособие для студ. втузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 208 с.
3. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
4. Волков В.А. Элементы линейного программирования. – М.: Просвещение, 1975. – 141 с.
5. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. – Ч.1. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.
6. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Издательство „Дело и Сервис” , 2001. – 368 с.
7. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.Т. Тришин, М.Н. Фридман / Под. ред. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
8. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высш. шк., 1975. – 270 с.
9. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986. – 286 с.
10. Ковалев В.Г., Наринян А.Р., Поздеев В.А. Математическое программирование (линейные задачи): Учеб. пособие. – К.: Изд-во Европ. ун-та, 2003. – 170 с.
11. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – 3-е изд., испр. – М.: Дело, 2002. – 688 с.

12. Кудрявцев Е.М. MathCad 2000 Pro. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 576 с.
13. Математичне програмування / В.О. Борисенко, Т.В. Ковальчук, В.В. Левчук, В.С. Мартиненко. – К.: ВЦ КДТЕУ, 1998. – 48 с.
14. Очков В.Ф. MathCad 2000 Pro для студентов и инженеров. – М.: КомпьютерПресс, 1998. – 384 с.
15. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCad. Математический практикум для инженеров и экономистов: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.
16. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.
17. Степанюк В.В. Методи математичного програмування. К.: Вища шк., 1984. – 272 с.
18. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций, 6-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом „ Вильямс”, 2001. – 912 с.
19. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці: Підручник для студентів вузів. – Харків: Гриф, 2002. – 580 с.

# ДОДАТКИ

## Додаток А

### Значення функції $e^{-x}$

| $x$ | $e^{-x}$ | $x$ | $e^{-x}$ | $x$ | $e^{-x}$ | $x$ | $e^{-x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 1,000 | 0,40 | 0,670 | 0,80 | 0,449 | 3,00 | 0,050 |
| 0,02 | 0,980 | 0,42 | 0,657 | 0,82 | 0,440 | 3,20 | 0,041 |
| 0,04 | 0,961 | 0,44 | 0,644 | 0,84 | 0,432 | 3,40 | 0,033 |
| 0,06 | 0,942 | 0,46 | 0,631 | 0,86 | 0,432 | 3,60 | 0,027 |
| 0,08 | 0,923 | 0,48 | 0,619 | 0,88 | 0,415 | 3,80 | 0,022 |
| 0,10 | 0,905 | 0,50 | 0,606 | 0,90 | 0,407 | 4,00 | 0,0183 |
| 0,12 | 0,887 | 0,52 | 0,595 | 0,92 | 0,399 | 4,20 | 0,0150 |
| 0,14 | 0,869 | 0,54 | 0,583 | 0,94 | 0,391 | 4,40 | 0,0123 |
| 0,16 | 0,852 | 0,56 | 0,571 | 0,96 | 0,383 | 4,60 | 0,0101 |
| 0,18 | 0,835 | 0,58 | 0,560 | 0,98 | 0,375 | 4,80 | 0,0082 |
| 0,20 | 0,819 | 0,60 | 0,549 | 1,00 | 0,368 | 5,00 | 0,0067 |
| 0,22 | 0,803 | 0,62 | 0,538 | 1,20 | 0,302 | 5,20 | 0,0055 |
| 0,24 | 0,787 | 0,64 | 0,527 | 1,40 | 0,247 | 5,40 | 0,0045 |
| 0,26 | 0,771 | 0,66 | 0,517 | 1,60 | 0,202 | 5,60 | 0,0037 |
| 0,28 | 0,756 | 0,68 | 0,507 | 1,80 | 0,165 | 5,80 | 0,0030 |
| 0,30 | 0,741 | 0,70 | 0,497 | 2,00 | 0,135 | 6,00 | 0,0025 |
| 0,32 | 0,726 | 0,72 | 0,487 | 2,20 | 0,111 | 6,20 | 0,0020 |
| 0,34 | 0,712 | 0,74 | 0,477 | 2,40 | 0,091 | 6,40 | 0,0017 |
| 0,36 | 0,698 | 0,76 | 0,468 | 2,60 | 0,074 | 6,60 | 0,0014 |
| 0,38 | 0,684 | 0,78 | 0,458 | 2,80 | 0,061 | 6,80 | 0,0011 |
| 0,40 | 0,670 | 0,80 | 0,449 | 3,00 | 0,050 | 7,00 | 0,0009 |

# Додаток Б

**Нормована функція Лапласа** $\hat{O}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-t^2/2}dt$

| $z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 00000 | 00399 | 00789 | 01197 | 01595 | 01994 | 02392 | 02790 | 03188 | 03586 |
| 0,1 | 03983 | 04380 | 04776 | 05172 | 05567 | 05962 | 06356 | 06749 | 07142 | 07535 |
| 0,2 | 07926 | 08317 | 08706 | 09095 | 09483 | 09871 | 10257 | 10642 | 11026 | 11409 |
| 0,3 | 11791 | 12172 | 12552 | 12930 | 13307 | 13683 | 14058 | 14431 | 14803 | 15173 |
| 0,4 | 15542 | 15910 | 16276 | 16640 | 17003 | 17364 | 17724 | 18082 | 18439 | 18793 |
| 0,5 | 19146 | 19497 | 19847 | 20194 | 20540 | 20884 | 21226 | 21566 | 21904 | 22240 |
| 0,6 | 22575 | 22907 | 23237 | 23565 | 23891 | 24215 | 24537 | 24857 | 25175 | 25490 |
| 0,7 | 25804 | 26115 | 26424 | 26730 | 27035 | 27337 | 27637 | 27935 | 28230 | 28524 |
| 0,8 | 28814 | 29103 | 29389 | 29673 | 29955 | 30234 | 30511 | 30785 | 31057 | 31327 |
| 0,9 | 31594 | 31859 | 32121 | 32381 | 32639 | 32894 | 33147 | 33398 | 33646 | 33891 |
| 1,0 | 34134 | 34375 | 34614 | 34850 | 35083 | 35314 | 35543 | 35769 | 35993 | 36214 |
| 1,1 | 36433 | 36650 | 36864 | 37076 | 37286 | 37493 | 37698 | 38000 | 38100 | 38298 |
| 1,2 | 38493 | 38686 | 38877 | 39065 | 39251 | 39435 | 39617 | 39796 | 39973 | 40147 |
| 1,3 | 40320 | 40490 | 40658 | 40824 | 40988 | 41149 | 41308 | 41466 | 41621 | 41774 |
| 1,4 | 41924 | 42073 | 42220 | 42364 | 42507 | 42647 | 42786 | 42922 | 43056 | 43189 |
| 1,5 | 43319 | 43448 | 43574 | 43699 | 43822 | 43943 | 44062 | 44179 | 44295 | 44408 |
| 1,6 | 44520 | 44630 | 44738 | 44845 | 44950 | 45053 | 45154 | 45254 | 45352 | 45449 |
| 1,7 | 45543 | 45637 | 45728 | 45818 | 45907 | 45994 | 46080 | 46164 | 46246 | 46327 |
| 1,8 | 46407 | 46485 | 46562 | 46638 | 46712 | 46784 | 46856 | 46926 | 46995 | 47062 |
| 1,9 | 47128 | 47193 | 47257 | 47320 | 47381 | 47441 | 47500 | 47558 | 47615 | 47670 |
| 2,0 | 47725 | 47778 | 47831 | 47882 | 47932 | 47982 | 48030 | 48077 | 48124 | 48169 |
| 2,1 | 48214 | 48257 | 48300 | 48341 | 48382 | 48422 | 48461 | 48500 | 48537 | 48574 |
| 2,2 | 48610 | 48645 | 48679 | 48713 | 48745 | 48778 | 48809 | 48840 | 48870 | 48899 |
| 2,3 | 48928 | 48956 | 48983 | 49010 | 49036 | 49061 | 49086 | 49111 | 49134 | 49158 |
| 2,4 | 49180 | 49202 | 49224 | 49245 | 49266 | 49286 | 49305 | 49324 | 49343 | 49361 |
| 2,5 | 49379 | 49396 | 49413 | 49430 | 49446 | 49461 | 49477 | 49492 | 49506 | 49520 |
| 2,6 | 49534 | 49547 | 49560 | 49573 | 49585 | 49598 | 49609 | 49621 | 49632 | 49643 |
| 2,7 | 49653 | 49664 | 49674 | 49683 | 49693 | 49702 | 49711 | 49720 | 49728 | 49736 |
| 2,8 | 49744 | 49752 | 49760 | 49767 | 49774 | 49781 | 49788 | 49795 | 49801 | 49807 |
| 2,9 | 49813 | 49819 | 49825 | 49831 | 49836 | 49841 | 49846 | 49851 | 49856 | 49861 |
| 3,0 | 49865 | 49869 | 49874 | 49878 | 49882 | 49886 | 49889 | 49893 | 49896 | 49900 |

| $z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,1 | 49903 | 49903 | 49910 | 49913 | 49916 | 49918 | 49921 | 49924 | 49926 | 49929 |
| 3,2 | 49931 | 49934 | 49936 | 49938 | 49940 | 49942 | 49944 | 49946 | 49948 | 49950 |
| 3,3 | 49952 | 49953 | 49955 | 49957 | 49958 | 49960 | 49961 | 49962 | 49964 | 49965 |
| 3,4 | 49966 | 49968 | 49969 | 49970 | 49971 | 49972 | 49973 | 49974 | 49975 | 49976 |
| 3,5 | 49977 | 49978 | 49978 | 49979 | 49980 | 49981 | 49981 | 49982 | 49983 | 49983 |
| 3,6 | 49984 | 49985 | 49985 | 49986 | 49986 | 49987 | 49987 | 49988 | 49988 | 49989 |
| 3,7 | 49989 | 49990 | 49990 | 49990 | 49991 | 49991 | 49992 | 49992 | 49992 | 49992 |
| 3,8 | 49993 | 49993 | 49993 | 49994 | 49994 | 49994 | 49994 | 49995 | 49995 | 49995 |
| 3,9 | 49995 | 49995 | 49996 | 49996 | 49996 | 49996 | 49996 | 49996 | 49997 | 49997 |
| 4,0 | 49997 | | | | | | | | | |
| 5,0 | 49999 | | | | | | | | | |

*Примітка*. В таблиці подані мантиси значень функції (0,...).

# Додаток В

**Значення чисел *q* в залежності від об'єму вибірки *n* і надійності $\gamma$ для визначення довірчого інтервалу середнього квадратичного відхилення** $\sigma_x$

| *n* | $\gamma$ | | | *n* | $\gamma$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,95 | 0,99 | 0,999 | | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
| 7 | 0,92 | — | — | 25 | 0,32 | 0,49 | 0,73 |
| 8 | 0,80 | — | — | 30 | 0,28 | 0,43 | 0,63 |
| 9 | 0,71 | — | — | 35 | 0,26 | 0,38 | 0,56 |
| 10 | 0,65 | — | — | 40 | 0,24 | 0,35 | 0,50 |
| 11 | 0,59 | 0,98 | — | 45 | 0,22 | 0,32 | 0,46 |
| 12 | 0,55 | 0,90 | — | 50 | 0,21 | 0,30 | 0,43 |
| 13 | 0,52 | 0,83 | — | 60 | 0,188 | 0,269 | 0,38 |
| 14 | 0,48 | 0,78 | — | 70 | 0,174 | 0,245 | 0,34 |
| 15 | 0,46 | 0,73 | — | 80 | 0,161 | 0,226 | 0,31 |
| 16 | 0,44 | 0,70 | — | 90 | 0,151 | 0,211 | 0,29 |
| 17 | 0,42 | 0,66 | — | 100 | 0,143 | 0,198 | 0,27 |
| 18 | 0,40 | 0,63 | 0,96 | 150 | 0,115 | 0,160 | 0,211 |
| 19 | 0,39 | 0,60 | 0,92 | 200 | 0,099 | 0,136 | 0,185 |
| 20 | 0,37 | 0,58 | 0,88 | 250 | 0,089 | 0,120 | 0,162 |

# Додаток Г

## Критичні точки розподілу $\chi 2$

| Кількість ступенів вільності | Рівень значущості $\alpha$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,01 | 0,05 | 0,1 | 0,90 | 0,95 | 0,99 |
| 1 | 6,6 | 3,8 | 2,71 | 0,02 | 0,004 | 0,0002 |
| 2 | 9,2 | 6,0 | 4,61 | 0,21 | 0,1 | 0,02 |
| 3 | 11,3 | 7,8 | 6,25 | 0,58 | 0,35 | 0,12 |
| 4 | 13,3 | 9,5 | 7,78 | 1,06 | 0,71 | 0,30 |
| 5 | 15,1 | 11,1 | 9,24 | 1,61 | 1,15 | 0,55 |
| 6 | 16,8 | 12,6 | 10,6 | 2,20 | 1,64 | 0,87 |
| 7 | 18,5 | 14,1 | 12,0 | 2,83 | 2,17 | 1,24 |
| 8 | 20,1 | 15,5 | 13,4 | 3,49 | 2,73 | 1,65 |
| 9 | 21,7 | 16,9 | 14,7 | 4,17 | 3,33 | 2,09 |
| 10 | 23,2 | 18,3 | 16,0 | 4,87 | 3,94 | 2,56 |
| 11 | 24,7 | 19,7 | 17,3 | 5,58 | 4,57 | 3,05 |
| 12 | 26,2 | 21,0 | 18,5 | 6,30 | 5,23 | 3,57 |
| 13 | 27,7 | 22,4 | 19,8 | 7,04 | 5,89 | 4,11 |
| 14 | 29,1 | 23,7 | 21,1 | 7,79 | 6,57 | 4,66 |
| 15 | 30,6 | 25,0 | 22,3 | 8,55 | 7,26 | 5,23 |
| 16 | 32,0 | 26,3 | 23,5 | 9,31 | 7,96 | 5,81 |
| 17 | 33,4 | 27,6 | 24,8 | 10,1 | 8,67 | 6,41 |
| 18 | 34,8 | 28,9 | 26,0 | 10,9 | 9,39 | 7,01 |
| 19 | 36,2 | 30,1 | 27,2 | 11,7 | 10,1 | 7,63 |
| 20 | 37,6 | 31,4 | 28,4 | 12,4 | 10,9 | 8,26 |
| 21 | 38,9 | 32,7 | 29,6 | 13,2 | 11,6 | 8,90 |
| 22 | 40,3 | 33,9 | 30,8 | 14,0 | 12,3 | 9,54 |
| 23 | 41,6 | 35,2 | 32,0 | 14,8 | 13,1 | 10,2 |
| 24 | 43,0 | 36,4 | 33,2 | 15,7 | 13,8 | 10,9 |
| 25 | 44,3 | 37,7 | 34,4 | 16,5 | 14,6 | 11,5 |
| 26 | 45,6 | 38,9 | 35,6 | 17,3 | 15,4 | 12,2 |
| 27 | 47,0 | 40,1 | 36,7 | 18,1 | 16,2 | 12,9 |
| 28 | 48,3 | 41,3 | 37,9 | 18,9 | 16,9 | 13,6 |
| 29 | 49,6 | 42,6 | 39,1 | 19,8 | 17,7 | 14,3 |
| 30 | 50,9 | 43,8 | 40,3 | 20,6 | 18,5 | 15,0 |

# Додаток Д

## Критичні точки розподілу Фішера — Снедекора

$P = 0{,}9$ $(\alpha = 0{,}1)$

| $l_2$ \ $l_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 39,86 | 49,50 | 53,59 | 55,83 | 57,24 | 58,20 | 58,91 | 59,44 | 59,86 | 60,19 | 60,71 | 61,22 | 61,74 | 62,00 | 62,26 | 62,53 | 62,79 | 63,06 |
| 2 | 8,53 | 9,00 | 9,16 | 9,24 | 9,29 | 9,33 | 9,35 | 9,37 | 9,38 | 9,39 | 9,41 | 9,42 | 9,44 | 9,45 | 9,46 | 9,47 | 9,47 | 9,48 |
| 3 | 5,54 | 5,46 | 5,39 | 5,34 | 5,31 | 5,28 | 5,27 | 5,25 | 5,24 | 5,23 | 5,22 | 5,20 | 5,18 | 5,18 | 5,17 | 5,16 | 5,15 | 5,14 |
| 4 | 4,54 | 4,32 | 4,19 | 4,11 | 4,05 | 4,01 | 3,98 | 3,95 | 3,94 | 3,92 | 3,90 | 3,87 | 3,84 | 3,83 | 3,82 | 3,80 | 3,79 | 3,78 |
| 5 | 4,06 | 3,78 | 3,62 | 3,52 | 3,45 | 3,40 | 3,37 | 3,34 | 3,32 | 3,30 | 3,27 | 3,24 | 3,21 | 3,19 | 3,17 | 3,16 | 3,14 | 3,12 |
| 6 | 3,78 | 3,46 | 3,29 | 3,18 | 3,11 | 3,05 | 3,01 | 2,98 | 2,96 | 2,94 | 2,90 | 2,87 | 2,84 | 2,82 | 2,80 | 2,78 | 2,76 | 2,74 |
| 7 | 3,59 | 3,26 | 3,07 | 2,96 | 2,88 | 2,83 | 2,78 | 2,75 | 2,72 | 2,70 | 2,67 | 2,63 | 2,59 | 2,58 | 2,56 | 2,54 | 2,51 | 2,49 |
| 8 | 3,46 | 3,11 | 2,92 | 2,81 | 2,73 | 2,67 | 2,62 | 2,59 | 2,56 | 2,54 | 2,50 | 2,46 | 2,42 | 2,40 | 2,38 | 2,36 | 2,34 | 2,32 |
| 9 | 3,36 | 3,01 | 2,81 | 2,69 | 2,61 | 2,55 | 2,51 | 2,47 | 2,44 | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,30 | 2,28 | 2,25 | 2,23 | 2,21 | 2,18 |
| 10 | 3,29 | 2,92 | 2,73 | 2,61 | 2,52 | 2,46 | 2,41 | 2,38 | 2,35 | 2,32 | 2,28 | 2,24 | 2,20 | 2,18 | 2,16 | 2,13 | 2,11 | 2,08 |
| 11 | 3,23 | 2,86 | 2,66 | 2,54 | 2,45 | 2,39 | 2,34 | 2,30 | 2,27 | 2,25 | 2,21 | 2,17 | 2,12 | 2,10 | 2,08 | 2,05 | 2,03 | 2,00 |
| 12 | 3,18 | 2,81 | 2,61 | 2,48 | 2,39 | 2,33 | 2,28 | 2,24 | 2,21 | 2,19 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,04 | 2,01 | 1,99 | 1,96 | 1,93 |
| 13 | 3,14 | 2,76 | 2,56 | 2,43 | 2,35 | 2,28 | 2,23 | 2,20 | 2,16 | 2,14 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,98 | 1,96 | 1,93 | 1,90 | 1,88 |
| 14 | 3,10 | 2,73 | 2,52 | 2,39 | 2,31 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,12 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,94 | 1,91 | 1,89 | 1,86 | 1,83 |
| 15 | 3,07 | 2,70 | 2,49 | 2,36 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,12 | 2,09 | 2,06 | 2,02 | 1,97 | 1,92 | 1,90 | 1,87 | 1,85 | 1,82 | 1,79 |
| 16 | 3,05 | 2,67 | 2,46 | 2,33 | 2,24 | 2,18 | 2,13 | 2,09 | 2,06 | 2,03 | 1,99 | 1,94 | 1,89 | 1,87 | 1,84 | 1,81 | 1,78 | 1,75 |
| 17 | 3,03 | 2,64 | 2,44 | 2,31 | 2,22 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,03 | 2,00 | 1,96 | 1,91 | 1,86 | 1,84 | 1,81 | 1,78 | 1,75 | 1,72 |
| 18 | 3,01 | 2,62 | 2,42 | 2,29 | 2,20 | 2,13 | 2,08 | 2,04 | 2,00 | 1,98 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,81 | 1,78 | 1,75 | 1,72 | 1,69 |
| 19 | 2,99 | 2,61 | 2,40 | 2,27 | 2,18 | 2,11 | 2,06 | 2,02 | 1,98 | 1,96 | 1,91 | 1,86 | 1,81 | 1,79 | 1,76 | 1,73 | 1,70 | 1,67 |
| 20 | 2,97 | 2,59 | 2,38 | 2,25 | 2,16 | 2,09 | 2,04 | 2,00 | 1,96 | 1,94 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,77 | 1,74 | 1,71 | 1,68 | 1,64 |

| $l_2$ \ $l_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 2,96 | 2,57 | 2,36 | 2,23 | 2,14 | 2,08 | 2,02 | 1,98 | 1,95 | 1,92 | 1,87 | 1,83 | 1,78 | 1,75 | 1,72 | 1,69 | 1,66 | 1,62 |
| 22 | 2,95 | 2,56 | 2,35 | 2,22 | 2,13 | 2,06 | 2,01 | 1,97 | 1,93 | 1,90 | 1,86 | 1,81 | 1,76 | 1,73 | 1,70 | 1,67 | 1,64 | 1,60 |
| 23 | 2,94 | 2,55 | 2,34 | 2,21 | 2,11 | 2,05 | 1,99 | 1,95 | 1,92 | 1,89 | 1,84 | 1,80 | 1,74 | 1,72 | 1,69 | 1,66 | 1,62 | 1,59 |
| 24 | 2,93 | 2,54 | 2,33 | 2,19 | 2,10 | 2,04 | 1,98 | 1,94 | 1,91 | 1,88 | 1,83 | 1,78 | 1,73 | 1,70 | 1,67 | 1,64 | 1,61 | 1,57 |
| 25 | 2,92 | 2,53 | 2,32 | 2,18 | 2,09 | 2,02 | 1,97 | 1,93 | 1,89 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,72 | 1,69 | 1,66 | 1,63 | 1,59 | 1,56 |
| 26 | 2,91 | 2,52 | 2,31 | 2,17 | 2,08 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,88 | 1,86 | 1,81 | 1,76 | 1,71 | 1,68 | 1,65 | 1,61 | 1,58 | 1,54 |
| 27 | 2,90 | 2,51 | 2,30 | 2,17 | 2,07 | 2,00 | 1,95 | 1,91 | 1,87 | 1,85 | 1,80 | 1,75 | 1,70 | 1,67 | 1,64 | 1,60 | 1,57 | 1,53 |
| 28 | 2,89 | 2,50 | 2,29 | 2,16 | 2,06 | 2,00 | 1,94 | 1,90 | 1,87 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,69 | 1,66 | 1,63 | 1,59 | 1,56 | 1,52 |
| 29 | 2,89 | 2,50 | 2,28 | 2,15 | 2,06 | 1,99 | 1,93 | 1,89 | 1,86 | 1,83 | 1,78 | 1,73 | 1,68 | 1,65 | 1,62 | 1,58 | 1,55 | 1,51 |
| 30 | 2,88 | 2,49 | 2,28 | 2,14 | 2,05 | 1,98 | 1,93 | 1,88 | 1,85 | 1,82 | 1,77 | 1,72 | 1,67 | 1,64 | 1,61 | 1,57 | 1,54 | 1,50 |
| 40 | 2,84 | 2,44 | 2,23 | 2,09 | 2,00 | 1,93 | 1,87 | 1,83 | 1,79 | 1,76 | 1,71 | 1,66 | 1,61 | 1,57 | 1,54 | 1,51 | 1,47 | 1,42 |
| 60 | 2,79 | 2,39 | 2,18 | 2,04 | 1,95 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,74 | 1,71 | 1,66 | 1,60 | 1,54 | 1,51 | 1,48 | 1,44 | 1,40 | 1,35 |
| 120 | 2,75 | 2,35 | 2,13 | 1,99 | 1,90 | 1,82 | 1,77 | 1,72 | 1,68 | 1,65 | 1,60 | 1,55 | 1,48 | 1,45 | 1,41 | 1,37 | 1,32 | 1,26 |
| $\infty$ | 2,71 | 2,30 | 2,08 | 1,94 | 1,85 | 1,77 | 1,72 | 1,67 | 1,63 | 1,60 | 1,55 | 1,49 | 1,42 | 1,38 | 1,31 | 1,30 | 1,24 | 1,17 |

$P = 0{,}95\ (\alpha = 0{,}05)$

| $l_2$ \ $l_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 236,8 | 238,9 | 240,5 | 241,9 | 243,9 | 245,9 | 248,0 | 249,1 | 250,1 | 251,1 | 252,2 | 253,3 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,38 | 19,40 | 19,41 | 19,43 | 19,45 | 19,45 | 19,46 | 19,47 | 19,48 | 19,49 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 | 8,79 | 8,74 | 8,70 | 8,66 | 8,64 | 8,62 | 8,59 | 8,57 | 8,55 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,91 | 5,86 | 5,80 | 5,77 | 5,75 | 5,72 | 5,69 | 5,66 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 | 4,74 | 4,68 | 4,62 | 4,56 | 4,53 | 4,50 | 4,46 | 4,43 | 4,40 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 4,00 | 3,94 | 3,87 | 3,84 | 3,81 | 3,77 | 3,74 | 3,70 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,64 | 3,57 | 3,51 | 3,44 | 3,41 | 3,38 | 3,34 | 3,30 | 3,27 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,35 | 3,28 | 3,22 | 3,15 | 3,12 | 3,08 | 3,04 | 3,01 | 2,97 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,14 | 3,07 | 3,01 | 2,94 | 2,90 | 2,86 | 2,83 | 2,79 | 2,75 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,98 | 2,91 | 2,85 | 2,77 | 2,74 | 2,70 | 2,66 | 2,62 | 2,58 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,85 | 2,79 | 2,72 | 2,65 | 2,61 | 2,57 | 2,53 | 2,49 | 2,45 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 | 2,75 | 2,69 | 2,62 | 2,54 | 2,51 | 2,47 | 2,43 | 2,38 | 2,34 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 | 2,71 | 2,67 | 2,60 | 2,53 | 2,46 | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,30 | 2,25 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 | 2,60 | 2,53 | 2,46 | 2,39 | 2,35 | 2,31 | 2,27 | 2,22 | 2,18 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,71 | 2,64 | 2,59 | 2,54 | 2,48 | 2,40 | 2,33 | 2,29 | 2,25 | 2,20 | 2,16 | 2,11 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 | 2,42 | 2,35 | 2,28 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,61 | 2,55 | 2,49 | 2,45 | 2,38 | 2,31 | 2,23 | 2,19 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,01 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 | 2,46 | 2,41 | 2,34 | 2,27 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 | 2,02 | 1,97 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,54 | 2,48 | 2,42 | 2,38 | 2,31 | 2,23 | 2,16 | 2,11 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,93 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,51 | 2,45 | 2,39 | 2,35 | 2,28 | 2,20 | 2,12 | 2,08 | 2,04 | 1,99 | 1,95 | 1,90 |

| $l_2$ \ $l_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,49 | 2,42 | 2,37 | 2,32 | 2,25 | 2,18 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,87 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,46 | 2,40 | 2,34 | 2,30 | 2,23 | 2,15 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,89 | 1,84 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,44 | 2,37 | 2,32 | 2,27 | 2,20 | 2,13 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,91 | 1,86 | 1,81 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,42 | 2,36 | 2,30 | 2,25 | 2,18 | 2,11 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,89 | 1,84 | 1,79 |
| 25 | 4,24 | 3,39 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,40 | 2,34 | 2,28 | 2,24 | 2,16 | 2,09 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,82 | 1,77 |
| 26 | 4,23 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,39 | 2,32 | 2,27 | 2,22 | 2,15 | 2,07 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,85 | 1,80 | 1,75 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,37 | 2,31 | 2,25 | 2,20 | 2,13 | 2,06 | 1,97 | 1,93 | 1,88 | 1,84 | 1,79 | 1,73 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,45 | 2,36 | 2,29 | 2,24 | 2,19 | 2,12 | 2,04 | 1,96 | 1,91 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,71 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,55 | 2,43 | 2,35 | 2,28 | 2,22 | 2,18 | 2,10 | 2,03 | 1,94 | 1,90 | 1,85 | 1,81 | 1,75 | 1,70 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,09 | 2,01 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,68 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,08 | 2,00 | 1,92 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,69 | 1,64 | 1,58 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,53 | 2,37 | 2,25 | 2,17 | 2,10 | 2,04 | 1,99 | 1,92 | 1,84 | 1,75 | 1,70 | 1,65 | 1,59 | 1,53 | 1,47 |
| 120 | 3,92 | 3,07 | 2,68 | 2,45 | 2,29 | 2,17 | 2,09 | 2,02 | 1,96 | 1,91 | 1,83 | 1,75 | 1,66 | 1,61 | 1,55 | 1,50 | 1,43 | 1,35 |
| ∞ | 3,84 | 3,00 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,10 | 2,01 | 1,94 | 1,88 | 1,83 | 1,75 | 1,67 | 1,57 | 1,52 | 1,46 | 1,39 | 1,32 | 1,22 |

# Додаток Е

## $t$ – розподіл
## (значення $t_{кр}$, відповідне $P(T > t_{кр}) = \alpha$)

| $l$ | $\alpha$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,10 | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 |
| 1 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 |
| 2 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 |
| 3 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 |
| 4 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 |
| 5 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 |
| 6 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 |
| 7 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 |
| 8 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 |
| 9 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 |
| 10 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 |
| 11 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 |
| 12 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 |
| 13 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 |
| 14 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 |
| 15 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 |
| 16 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 |
| 17 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 |
| 18 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 |
| 19 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 |
| 20 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 |
| 21 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 |
| 22 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 |
| 23 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 |
| 24 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 |
| 25 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 |
| 26 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 |
| 27 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 |
| 28 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 |
| 29 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 |
| 30 | | | | | |
| 40 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 |
| 60 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 |
| 120 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,576 |
| $\infty$ | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 |

# ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

**Дякон Валерій Миколайович**

**Ковальов Леонід Євгенійович**